Un modèle pour raisonner sur les relations entre régions indéterminées

Philippe Balbiani[1] **Jean-François Condotta**[2]

[1]Institut de recherche en informatique de Toulouse
[2]Centre de recherche en informatique de Lens
Philippe.Balbiani@irit.fr condotta@cril.univ-artois.fr

Résumé

Lorsque nous raisonnons sur les relations entre régions dans l'espace, les frontières des entités dont nous nous occupons peuvent dans certains cas ne pas être connues avec certitude. Nous parlons alors de régions indéterminées, i.e. nous parlons de couples (a_1, a_2) de régions tels que $a_1 \subseteq a_2$. Les relations primitives entre les régions indéterminées (a_1, a_2) et (b_1, b_2) sont déterminées par les différentes possibilités qu'il y a de situer dans l'espace les régions a_1, a_2, b_1 et b_2 tout en préservant les contraintes $a_1 \subseteq a_2$ et $b_1 \subseteq b_2$. Elles sont au nombre de 46. Dans cet article, nous analysons les propriétés algébriques de ces relations primitives. Nous analysons également la complexité de la résolution de contraintes qualitatives qu'elles permettent d'exprimer.

Abstract

When we reason about the relationships between regions in space, the boundaries of the entities we deal with may in some cases not be known with certainty [7]. We are then talking about indeterminate regions, i.e. we are talking about couples (a_1, a_2) of regions such that $a_1 \subseteq a_2$. The primitive relations between the indeterminate regions (a_1, a_2) and (b_1, b_2) are determined by the different possibilities of locating the regions a_1, a_2, b_1 and b_2 while preserving the constraints $a_1 \subseteq a_2$ and $b_1 \subseteq b_2$. There are 46 of them. In this article, we analyze the algebraic properties of these primitive relations. We also analyze the complexity of the resolution of qualitative constraints that they allow one to express.

1 Introduction

Le paysagiste concevant un jardin d'agrément, l'architecte planifiant la construction d'un bâtiment, le décorateur préparant la scène d'un théâtre, tous doivent trouver une solution à un même problème : exprimer les rapports entre certaines régions de l'espace et agencer ces régions de manière à satisfaire les rapports exprimés. Quelles régions de l'espace et quelles relations primitives entre elles doivent-ils considérer ? De nombreuses raisons les convaincront de considérer que les régions de l'espace qui les intéressent sont les fermés réguliers de l'espace des réels. C'est que, dans tout espace topologique, les fermés réguliers constituent une algèbre de Boole. Voilà pour le choix des entités primitives. Mais quid des relations primitives entre ces régions ? La première des relations qui s'impose à l'esprit est la relation d'inclusion : le parterre est situé au centre du jardin, la salle de réunion est logée au cœur du bâtiment, les tableaux sont accrochés au milieu du mur de la scène de théâtre.

La relation d'inclusion ne sauraient résumer à elle seule les rapports entre fermés réguliers dans un espace topologique. Il faut parfois distinguer la relation de chevauchement — qui est vérifiée entre deux régions lorsque les ouverts qu'elles définissent ont une intersection non-vide — et la relation de contact — qui est vérifiée entre deux régions lorsqu'elles ont une intersection non-vide. La relation de contact permet, avec la relation d'égalité, de définir un jeu de 8 relations binaires constituant une partition de l'ensemble des relations possibles entre les fermés réguliers non-vides des espaces topologiques. Ces 8 relations sont les relations de l'algèbre qualitative *RCC*8 et ont connu un destin plutôt singulier [13, 19, 24, 25, 26]. *RCC*8 possède de nombreuses variantes (*RCC*5 [15, 26], *BRCC*8 [30], *Cc* et L^c [16, 17, 18, 28], etc) et a été appliquée à de nombreux domaines (conception architecturale [14], navigation de robot [12, 13], systèmes d'informations géographiques [9, 10], etc).

Une variante de *RCC*8 à propos de laquelle peu de choses ont été écrites est la variante *Egg-Yolk* [11]. Elle a été également considérée, sous des formes diverses, par [4, 5, 8, 27, 31]. Dans cette variante, il est admis que les frontières des régions dont nous nous occupons ne peuvent pas être connues avec certitude. Aussi, les entités primitives de la variante Egg-Yolk sont-elles des couples (a_1, a_2) de régions $RCC5$ tels que $a_1 \subseteq a_2$: les éléments de a_1 sont les points de l'espace qui appartiennent certainement à l'entité et les éléments de a_2 sont les points de l'espace qui appartiennent peut-être à l'entité. Les relations primitives entre des entités (a_1, a_2) et (b_1, b_2) de ce type sont déterminées par les différentes possibilités qu'il y a de situer dans l'espace les régions $RCC5$ a_1, a_2, b_1 et b_2 tout en préservant les contraintes $a_1 \subseteq a_2$ et $b_1 \subseteq b_2$. Elles sont au nombre de 46. Dans cet article, nous analysons les propriétés algébriques de ces relations primitives. Nous analysons également la complexité de la résolution de contraintes qualitatives qu'elles permettent d'exprimer.

2 Algèbre des régions indéterminées

Soit X un ensemble non-vide.

2.1 Opérations sur les régions indéterminées

Une région indéterminée de X est un couple (a_1, a_2) de parties de X tel que $a_1 \subseteq a_2$: les éléments de a_1 sont les points de X qui appartiennent certainement à l'entité représentée et les éléments de a_2 sont les points de X qui appartiennent peut-être à l'entité représentée. Nous dirons qu'une région indéterminée (a_1, a_2) de X est précise ssi $a_1 = a_2$. Soit $IR^2(X)$ l'ensemble des régions indéterminées de X. Nous définissons sur $IR^2(X)$ les opérations u_X (arité 0), $\downarrow_X$ (arité 1), $\uparrow_X$ (arité 1), $*_X$ (arité 1), $+_X$ (arité 2) et $\cdot_X$ (arité 2) de la façon suivante :

— $u_X = (\emptyset, X)$,

— $(a_1, a_2)^{\downarrow_X} = (a_1, a_1)$,

— $(a_1, a_2)^{\uparrow_X} = (a_2, a_2)$,

— $(a_1, a_2)^{*_X} = (X \setminus a_2, X \setminus a_1)$,

— $(a_1, a_2) +_X (b_1, b_2) = (a_1 \cup b_1, a_2 \cup b_2)$,

— $(a_1, a_2) \cdot_X (b_1, b_2) = (a_1 \cap b_1, a_2 \cap b_2)$.

u_X représente la région indéterminée à propos de laquelle nous ne savons rien : aucun point de X ne lui appartient certainement et tout point de X lui appartient peut-être. Pour toute région indéterminée (a_1, a_2) de X, $(a_1, a_2)^{\downarrow_X}$ représente la région précise constituée des points de X appartenant certainement à (a_1, a_2) et $(a_1, a_2)^{\uparrow_X}$ représente la région précise constituée des points de X appartenant peut-être à (a_1, a_2). Concernant l'opération $*_X$, sa définition répond au principe de dualité entre les adverbes "certainement" et "peut-être" : un point de X appartient certainement au complément de la région indéterminée (a_1, a_2) de X lorsqu'il n'appartient pas peut-être à (a_1, a_2) et un point de X appartient peut-être au complément de la région indéterminée (a_1, a_2) de X lorsqu'il n'appartient certainement pas à (a_1, a_2). Enfin, pour ce qui est des opérations $+_X$ et $\cdot_X$, des commentaires semblables peuvent être effectués.

2.2 Algèbres concrètes

Les opérations que nous venons de définir vérifient bien-sûr un certain nombre de propriétés, mais lesquelles ? Quel type d'algèbre est la structure algébrique concrète $(IR^2(X), u_X, \downarrow_X, \uparrow_X, *_X, +_X, \cdot_X)$? Tout d'abord, puisque X est non-vide, alors

— $u_X^{\downarrow_X} \neq u_X^{\uparrow_X}$.

Soit $0_X = u_X^{\downarrow_X}$ et $1_X = u_X^{\uparrow_X}$. Bien entendu, $0_X = (\emptyset, \emptyset)$ et $1_X = (X, X)$. Remarquons au passage que si les régions indéterminées (a_1, a_2) et (b_1, b_2) de X sont précises alors les régions $(a_1, a_2)^{*_X}$, $(a_1, a_2) +_X (b_1, b_2)$ et $(a_1, a_2) \cdot_X (b_1, b_2)$ sont précises aussi. Pour tout $(a_1, a_2) \in IR^2(X)$, soit $(a_1, a_2)^- = (a_1, a_2)^{\downarrow_X}$ et $(a_1, a_2)^+ = (a_1, a_2)^{\uparrow_X}$. Clairement, pour tout $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in IR^2(X)$,

— $(a_1, a_2)^{\downarrow_X \downarrow_X} = (a_1, a_2)^{\downarrow_X}$ et $(a_1, a_2)^{\downarrow_X \uparrow_X} = (a_1, a_2)^{\downarrow_X}$,

— $(a_1, a_2)^{\uparrow_X \downarrow_X} = (a_1, a_2)\uparrow_X$ et $(a_1, a_2)^{\uparrow_X \uparrow_X} = (a_1, a_2)^{\uparrow_X}$,

— $(a_1, a_2)^{*_X \downarrow_X} = (a_1, a_2)^{\uparrow_X *_X}$ et $(a_1, a_2)^{*_X \uparrow_X} = (a_1, a_2)^{\downarrow_X *_X}$,

— $((a_1, a_2) +_X (b_1, b_2))^{\downarrow_X} = (a_1, a_2)^{\downarrow_X} +_X (b_1, b_2)^{\downarrow_X}$ et $((a_1, a_2) +_X (b_1, b_2))^{\uparrow_X} = (a_1, a_2)^{\uparrow_X} +_X (b_1, b_2)^{\uparrow_X}$,

— $((a_1, a_2) \cdot_X (b_1, b_2))^{\downarrow_X} = (a_1, a_2)^{\downarrow_X} \cdot_X (b_1, b_2)^{\downarrow_X}$ et $((a_1, a_2) \cdot_X (b_1, b_2))^{\uparrow_X} = (a_1, a_2)^{\uparrow_X} \cdot_X (b_1, b_2)^{\uparrow_X}$.

De plus, $(IR^2(X), +_X, \cdot_X)$ est un treillis distributif tel que pour tout $(a_1, a_2) \in IR^2(X)$,

— $(a_1, a_2) +_X 0_X = (a_1, a_2)$ et

— $(a_1, a_2) \cdot_X 1_X = (a_1, a_2)$.

Egalement, pour tout $(a_1, a_2) \in IR^2(X)$,

— $(a_1, a_2)^{\downarrow_X} +_X (a_1, a_2)^{*_X \uparrow_X} = 1_X$ et $(a_1, a_2)^{\uparrow_X} +_X (a_1, a_2)^{*_X \downarrow_X} = 1_X$,

— $(a_1, a_2)^{\downarrow_X} \cdot_X (a_1, a_2)^{*_X \uparrow_X} = 0_X$ et $(a_1, a_2)^{\uparrow_X} \cdot_X (a_1, a_2)^{*_X \downarrow_X} = 0_X$.

D'autre part, pour tout $(a_1, a_2) \in IR^2(X)$,

— $(a_1, a_2)^{\downarrow_X} +_X (a_1, a_2)^{\uparrow_X} = (a_1, a_2)^{\uparrow_X}$ et $(a_1, a_2)^{\downarrow_X} \cdot_X (a_1, a_2)^{\uparrow_X} = (a_1, a_2)^{\downarrow_X}$.

Finalement, pour tout $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in IR^2(X)$,

— si $(a_1, a_2)^{\downarrow_X} = (b_1, b_2)^{\downarrow_X}$ et $(a_1, a_2)^{\uparrow_X} = (b_1, b_2)^{\uparrow_X}$ alors $(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$.

2.3 Algèbres abstraites

Soit $(A, u, \downarrow, \uparrow, *, +, \cdot)$ une structure algébrique abstraite de type $(0, 1, 1, 1, 2, 2)$. Nous dirons que $(A, u, \downarrow, \uparrow, *, +, \cdot)$ est non-dégénérée ssi

— $u^{\downarrow} \neq u^{\uparrow}$.

Soit $0 = u^{\downarrow}$ et $1 = u^{\uparrow}$. Pour tout $a \in A$, soit $a^- = a^{\downarrow}$ et $a^+ = a^{\uparrow}$. Nous dirons que $(A, u, \downarrow, \uparrow, *, +, \cdot)$ est fermée ssi pour tout $a, b \in A$,

— $a^{\downarrow\downarrow} = a^{\downarrow}$ et $a^{\downarrow\uparrow} = a^{\downarrow}$,

— $a^{\uparrow\downarrow} = a^{\uparrow}$ et $a^{\uparrow\uparrow} = a^{\uparrow}$,

— $a^{*\downarrow} = a^{\uparrow *}$ et $a^{*\uparrow} = a^{\downarrow *}$,

— $(a+b)^{\downarrow} = a^{\downarrow} + b^{\downarrow}$ et $(a+b)^{\uparrow} = a^{\uparrow} + b^{\uparrow}$,

— $(a \cdot b)^{\downarrow} = a^{\downarrow} \cdot b^{\downarrow}$ et $(a \cdot b)^{\uparrow} = a^{\uparrow} \cdot b^{\uparrow}$.

Nous dirons que $(A, u, \downarrow, \uparrow, *, +, \cdot)$ est standard ssi $(A, +, \cdot)$ est un treillis distributif tel que pour tout $a \in A$,

— $a + 0 = a$ et

— $a \cdot 1 = a$.

Nous dirons que $(A, u, \downarrow, \uparrow, *, +, \cdot)$ est parfaite ssi pour tout $a \in A$,

— $a^{\downarrow} + a^{*\uparrow} = 1$ et $a^{\uparrow} + a^{*\downarrow} = 1$,

— $a^{\downarrow} \cdot a^{*\uparrow} = 0$ et $a^{\uparrow} \cdot a^{*\downarrow} = 0$.

Nous dirons que $(A, u, \downarrow, \uparrow, *, +, \cdot)$ est monotone ssi pour tout $a \in A$,

— $a^{\downarrow} + a^{\uparrow} = a^{\uparrow}$ et $a^{\downarrow} \cdot a^{\uparrow} = a^{\downarrow}$.

Nous dirons que $(A, u, \downarrow, \uparrow, *, +, \cdot)$ est adéquate ssi pour tout $a, b \in A$,

— si $a^{\downarrow} = b^{\downarrow}$ et $a^{\uparrow} = b^{\uparrow}$ alors $a = b$.

Nous dirons qu'une structure algébrique de type $(0, 1, 1, 1, 2, 2)$ est normale ssi elle est non-dégénérée, fermée, standard, parfaite, monotone et adéquate. De tout ce qui précède, il s'ensuit que pour tout ensemble non-vide X, $(IR^2(X), u_X, \downarrow_X, \uparrow_X, *_X, +_X, \cdot_X)$ est une structure algébrique normale de type $(0, 1, 1, 1, 2, 2)$.

2.4 Plongement injectif

Soit $(A, u, \downarrow, \uparrow, *, +, \cdot)$ une structure algébrique normale de type $(0, 1, 1, 1, 2, 2)$. Par conséquent, $(A, u, \downarrow, \uparrow, *, +, \cdot)$ est non-dégénérée, fermée, standard, parfaite, monotone et adéquate. Nous allons construire un ensemble X non-vide tel que $(A, u, \downarrow, \uparrow, *, +, \cdot)$ peut être injectivement plongée dans $(IR^2(X), u_X, \downarrow_X, \uparrow_X, *_X, +_X, \cdot_X)$. Pour tout $a \in A$, soit $a^- = a^{\downarrow}$ et $a^+ = a^{\uparrow}$. Soit $B = \{a^{\alpha} : a \in A \text{ et } \alpha \in \{-, +\}\}$. Soit 0_B (arité 0), 1_B (arité 0), $*_B$ (arité 1), $+_B$ (arité 2) et $\cdot_B$ (arité 2) les opérations sur B définies de la façon suivante :

— $0_B = u^{\downarrow}$,

— $1_B = u^{\uparrow}$,

— $a^{*_B} = a^*$,

— $a +_B b = a + b$,

— $a \cdot_B b = a \cdot b$.

Puisque $(A, u, \downarrow, \uparrow, *, +, \cdot)$ est non-dégénérée, fermée, standard et parfaite, alors $(B, 0_B, 1_B, *_B, +_B, \cdot_B)$ est une algèbre de Boole non-dégénérée. Par conséquent, pour tout $a, b \in B$, $a +_B b = b$ ssi $a \cdot_B b = a$. Nous définissons sur B la relation binaire $\leq_B$ de la façon suivante :

— $a \leq_B b$ ssi $a +_B b = b$ et $a \cdot_B b = a$.

Puisque $(A, u, \downarrow, \uparrow, *, +, \cdot)$ est monotone, alors

Lemme 1 *Pour tout $a \in A$, $a^- \leq_B a^+$.*

Puisque $(A, u, \downarrow, \uparrow, *, +, \cdot)$ est adéquate, alors

Lemme 2 *Pour tout $a, b \in A$, si $a^- = b^-$ et $a^+ = b^+$ alors $a = b$.*

Puisque $(B, 0_B, 1_B, *_B, +_B, \cdot_B)$ est une algèbre de Boole non-dégénérée, alors $\leq_B$ est une relation d'ordre sur B telle que pour tout $a, b \in B$, $a +_B b = \sup_{\leq_B}\{a, b\}$ et $a \cdot_B b = \inf_{\leq_B}\{a, b\}$. Nous dirons qu'une partie F de B est un B-filtre ssi pour tout $a, b \in B$,

— $1_B \in F$,

— si $a \in F$ et $a \leq_B b$ alors $b \in F$,

— si $a \in F$ et $b \in F$ alors $a \cdot_B b \in F$.

Nous dirons qu'un B-filtre F est propre ssi $0_B \notin F$. Nous dirons qu'un B-filtre F propre est premier ssi pour tout $a, b \in B$, si $a +_B b \in F$ alors $a \in F$, ou $b \in F$. Pour tout $a \in B$, soit $[a)_B = \{b \in B : a \leq_B b\}$. Il est bien connu que pour tout $a \in B$, $[a)_B$ est un B-filtre et si $a \neq 0_B$ alors $[a)_B$ est propre. De plus, pour tout $a \in B$ et pour tout B-filtre propre F, si $a \notin F$ alors il existe un B-filtre premier G tel que $a \notin G$ et $F \subseteq G$. Par conséquent, pour tout $a, b \in B$, si $a \not\leq_B b$ alors il existe un B-filtre premier F tel que $a \in F$ et $b \notin F$. Clairement,

Lemme 3 *Pour tout B-filtre premier F, $0_B \notin F$ et $1_B \in F$.*

Soit X_B l'ensemble de tous les B-filtres premiers. De tout ce qui précède, il s'ensuit que X_B est non-vide. Pour tout $a \in A$ et pour tout $\alpha \in \{-, +\}$, soit $h^{\alpha}(a) = \{F \in X_B : a^{\alpha} \in F\}$. Clairement, pour tout $a \in A$ et pour tout B-filtre premier F, $a^{\downarrow\downarrow} \in F$ ssi $a^{\downarrow} \in F$, $a^{\downarrow\uparrow} \in F$ ssi $a^{\downarrow} \in F$, $a^{\uparrow\downarrow} \in F$ ssi $a^{\uparrow} \in F$ et $a^{\uparrow\uparrow} \in F$ ssi $a^{\uparrow} \in F$. Par conséquent,

Lemme 4 *Pour tout $a \in A$, $h^-(a^{\downarrow}) = h^-(a)$, $h^+(a^{\downarrow}) = h^-(a)$, $h^-(a^{\uparrow}) = h^+(a)$ et $h^+(a^{\uparrow}) = h^+(a)$.*

De plus, pour tout $a \in A$ et pour tout B-filtre premier F, $a^{*\downarrow} \in F$ ssi $a^{\uparrow} \notin F$ et $a^{*\uparrow} \in F$ ssi $a^{\downarrow} \notin F$. Par conséquent,

Lemme 5 *Pour tout $a \in A$, $h^-(a^*) = X_B \setminus h^+(a)$ et $h^+(a^*) = X_B \setminus h^-(a)$.*

Egalement, pour tout $a, b \in A$ et pour tout B-filtre premier F, $(a+b)^{\downarrow} \in F$ ssi $a^{\downarrow} \in F$, ou $b^{\downarrow} \in F$ et $(a+b)^{\uparrow} \in F$ ssi $a^{\uparrow} \in F$, ou $b^{\uparrow} \in F$. Par conséquent,

Lemme 6 *Pour tout $a, b \in A$, $h^-(a+b) = h^-(a) \cup h^-(b)$ et $h^+(a+b) = h^+(a) \cup h^+(b)$.*

Finalement, pour tout $a, b \in A$ et pour tout B-filtre premier F, $(a \cdot b)^{\downarrow} \in F$ ssi $a^{\downarrow} \in F$ et $b^{\downarrow} \in F$ et $(a \cdot b)^{\uparrow} \in F$ ssi $a^{\uparrow} \in F$ et $b^{\uparrow} \in F$. Par conséquent,

Lemme 7 *Pour tout $a, b \in A$, $h^-(a \cdot b) = h^-(a) \cap h^-(b)$ et $h^+(a \cdot b) = h^+(a) \cap h^+(b)$.*

Pour tout $a \in A$, soit $h(a) = (h^-(a), h^+(a))$.

Lemme 8 *Pour tout $a \in A$, $h(a)$ est une région non-déterminée sur X_B.*

Démonstration : Soit $a \in A$. Supposons que $h(a)$ n'est pas une région non-déterminée sur X_B. Par conséquent, $h^-(a) \nsubseteq h^+(a)$. Soit $F \in X_B$ tel que $F \in h^-(a)$ et $F \notin h^+(a)$. Par conséquent, $a^- \in F$ et $a^+ \notin F$. Puisque F est un B-filtre, alors $a^- \nleq_B a^+$: contradiction avec le lemme 1. $\dashv$

Lemme 9 *Pour tout $a, b \in A$, si $h(a) = h(b)$ alors $a = b$.*

Démonstration : Soit $a, b \in A$. Supposons que $h(a) = h(b)$ et $a \neq b$. Par conséquent, $h^-(a) = h^-(b)$ et $h^+(a) = h^+(b)$. De plus, par le lemme 2, $a^- \neq b^-$, ou $a^+ \neq b^+$.
Cas $a^- \neq b^-$. Puisque $\leq_B$ est une relation d'ordre sur B, alors $a^- \nleq_B b^-$, ou $b^- \nleq_B a^-$. Sans perte de généralité, supposons que $a^- \nleq_B b^-$. Soit F est B-filtre premier tel que $a^- \in F$ et $b^- \notin F$. Par conséquent, $F \in h^-(a)$ et $F \notin h^-(b)$. Par conséquent, $h^-(a) \neq h^-(b)$: contradiction.
Cas $a^+ \neq b^+$. Semblable au cas précédent. $\dashv$

Lemme 10 *1. $h(u) = u_{X_B}$.*

2. Pour tout $a \in A$, $h(a^{\downarrow}) = h(a)^{\downarrow_{X_B}}$ et $h(a^{\uparrow}) = h(a)^{\uparrow_{X_B}}$.

3. Pour tout $a \in A$, $h(a^*) = h(a)^{*_{X_B}}$.

4. Pour tout $a, b \in A$, $h(a + b) = h(a) +_{X_B} h(b)$.

5. Pour tout $a, b \in A$, $h(a \cdot b) = h(a) \cdot_{X_B} h(b)$.

Démonstration : (1) Conséquence directe du lemme 3.
(2) Conséquence directe du lemme 4.
(3) Conséquence directe du lemme 5.
(4) Conséquence directe du lemme 6.
(5) Conséquence directe du lemme 7. $\dashv$

De tout ce qui précède, il s'ensuit que

Proposition 1 *h est un plongement injectif de $(A, u, \downarrow, \uparrow, *, +, \cdot)$ dans $(IR^2(X_B), u_{X_B}, \downarrow_{X_B}, \uparrow_{X_B}, *_{X_B}, +_{X_B}, \cdot_{X_B})$.*

3 Algèbre des relations primitives

Soit X un ensemble non-vide.

3.1 Régions qualitatives

Une région qualitative de X est une partie non-vide a de X. Concernant les positions relatives de deux régions qualitatives, il paraît raisonnable de s'arrêter aux relations DR, PO, PP, PPI et EQ définies de la façon suivante :

— $DR(a, b)$ ssi $a \cap b = \emptyset$,

— $PO(a, b)$ ssi $a \cap b \neq \emptyset$, $a \nsubseteq b$ et $a \nsupseteq b$,

— $PP(a, b)$ ssi $a \subseteq b$ et $a \nsupseteq b$,

— $PPI(a, b)$ ssi $a \nsubseteq b$ et $a \supseteq b$,

— $EQ(a, b)$ ssi $a = b$.

Nous obtenons donc un jeu de 5 relations primitives, DR, PO, PP, PPI et EQ, parmi lesquelles EQ est la relation identité. Ce sont les 5 relations primitives de $RCC5$ [15, 26]. Soit $\mathcal{A}_5$ l'ensemble de ces 5 relations primitives. Quelles opérations peuvent être définies sur les éléments de $\mathcal{A}_5$? Soit $A \in \mathcal{A}_5$. Il existe une seule relation primitive $B \in \mathcal{A}_5$, dénotée A^{-1} et appelée transposition de A, pour laquelle il existe des régions qualitatives a et b telles que $B(a, b)$ et $A(b, a)$. Soit $A, B \in \mathcal{A}_5$. Il existe un plus petit ensemble $R \subseteq \mathcal{A}_5$ de relations primitives, dénoté $A \circ B$ et appelé composition de A et B, tel que pour tout $C \in \mathcal{A}_5$, s'il existe des régions qualitatives a, b et c telles que $C(a, b)$, $A(a, c)$ et $B(c, b)$ alors $C \in R$. Une partie de $\mathcal{A}_5$ est appelée relation complexe de $\mathcal{A}_5$.

3.2 Régions indéterminées qualitatives

D'une certaine façon, la variante Egg-Yolk que nous allons étudier constitue une intégration étroite de $RCC5$ à la Wölfl et Westphal [29]. Des régions qualitatives a_1 et a_2 telles que $PP(a_1, a_2)$ définissent une région indéterminée qualitative dénotée (a_1, a_2). Une relation atomique potentielle entre régions indéterminées qualitatives est une matrice $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ dont les coefficients sont dans $\{DR, PO, PP, PPI, EQ\}$. Nous dirons que la relation atomique potentielle A entre régions indéterminées qualitatives est consistante ssi il existe des régions indéterminées qualitatives (a_1, a_2) et (b_1, b_2) telles que pour tout all $i, j \in \{1, 2\}$, $A_{ij}(a_i, b_j)$. 46 relations atomiques potentielles entre régions indéterminées qualitatives sont consistantes — $\begin{pmatrix} DR & DR \\ DR & DR \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} DR & DR \\ DR & PO \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} DR & PO \\ DR & PO \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} DR & PP \\ DR & PO \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} DR & PP \\ DR & PP \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} DR & DR \\ PO & PO \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} DR & PO \\ PO & PO \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} DR & PP \\ PO & PO \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} DR & PP \\ PO & PP \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} DR & DR \\ PPI & PO \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} DR & DR \\ PPI & PPI \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} DR & PO \\ PPI & PO \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} DR & PO \\ PPI & PPI \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} DR & PP \\ PPI & PO \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} DR & PP \\ PPI & PP \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} DR & PP \\ PPI & PPI \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} DR & PP \\ PPI & EQ \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} PO & PO \\ PO & PO \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} PO & PP \\ PO & PO \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} PO & PP \\ PO & PP \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} PO & PO \\ PPI & PO \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} PO & PO \\ PPI & PPI \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} PO & PP \\ PPI & PO \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} PO & PP \\ PPI & PP \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} PO & PP \\ PPI & PPI \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} PO & PP \\ PPI & EQ \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} PP & PP \\ PO & PO \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} PP & PP \\ PO & PP \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} PP & PP \\ PP & PP \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} PP & PP \\ PPI & PO \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} PP & PP \\ PPI & PP \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} PP & PP \\ PPI & PPI \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} PP & PP \\ PPI & EQ \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} PP & PP \\ EQ & PP \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} PPI & PO \\ PPI & PO \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} PPI & PO \\ PPI & PPI \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} PPI & PP \\ PPI & PO \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} PPI & PP \\ PPI & PP \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} PPI & PP \\ PPI & PPI \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} PPI & PP \\ PPI & EQ \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} PPI & PPI \\ PPI & PPI \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} PPI & EQ \\ PPI & PPI \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} EQ & PP \\ PPI & PO \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} EQ & PP \\ PPI & PP \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} EQ & PP \\ PPI & PPI \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} EQ & PP \\ PPI & EQ \end{pmatrix}$ — parmi lesquelles $\begin{pmatrix} EQ & PP \\ PPI & EQ \end{pmatrix}$ est la relation identité. Soit $\mathcal{A}_{46}$ l'ensemble des relations atomiques potentielles consistantes. Soit $A \in \mathcal{A}_{46}$.

Proposition 2 *Si B est une relation atomique potentielle telle que pour tout $i, j \in \{1,2\}$, $B_{ij} = A^{-1}_{ji}$ alors B est consistante.*

Démonstration : Supposons que B soit une relation atomique potentielle telle que pour tout $i, j \in \{1,2\}$, $B_{ij} = A^{-1}_{ji}$. Puisque $A \in \mathcal{A}_{46}$, alors A est consistante. Par conséquent, il existe des régions indéterminées qualitatives (a_1, a_2) et (b_1, b_2) telles que pour tout $i, j \in \{1,2\}$, $A_{ji}(b_j, a_i)$. Par conséquent, pour tout $i, j \in \{1,2\}$, $A^{-1}_{ji}(a_i, b_j)$. Puisque pour tout $i, j \in \{1,2\}$, $B_{ij} = A^{-1}_{ji}$, alors pour tout $i, j \in \{1,2\}$, $B_{ij}(a_i, b_j)$. Par conséquent, B est consistante. ⊣

Comme le lecteur peut lui-même le constater, il existe exactement une relation atomique potentielle consistante $B \in \mathcal{A}_{46}$, dénotée A^{-1} et appelée transposition de A, telle que pour tout $i, j \in \{1,2\}$, $B_{ij} = A^{-1}_{ji}$.

Proposition 3 *A^{-1} est l'unique relation atomique potentielle consistante B pour laquelle il existe des régions indéterminées qualitatives a, b telles que $B(a,b)$ et $A(b,a)$.*

Démonstration : Puisque $A \in \mathcal{A}_{46}$, alors A est consistante. Par conséquent, il existe des régions indéterminées qualitatives (a_1, a_2) et (b_1, b_2) telles que pour tout $i, j \in \{1,2\}$, $A_{ji}(b_j, a_i)$. Par conséquent, pour tout $i, j \in \{1,2\}$, $A^{-1}_{ji}(a_i, b_j)$. Puisque pour tout $i, j \in \{1,2\}$, $B_{ij} = A^{-1}_{ji}$, alors pour tout $i, j \in \{1,2\}$, $B_{ij}(a_i, b_j)$. Pour ce qui est de l'unicité, supposons que $B' \in \mathcal{A}_{46}$ soit telle qu'il existe des régions indéterminées qualitatives a' et b' telles que $B'(a', b')$ et $A(b', a')$ et $B'' \in \mathcal{A}_{46}$ soit telle qu'ile xiste des régions indéterminées qualitatives a'' et b'' telles que $B''(a'', b'')$ et $A(b'', a'')$. Par conséquent, pour tout $i, j \in \{1,2\}$, $B'_{ij}(a'_i, b'_j)$ et $A_{ji}(b'_j, a'_i)$ et pour tout $i, j \in \{1,2\}$, $B''_{ij}(a''_i, b''_j)$ et $A_{ji}(b''_j, a''_i)$. Par conséquent, pour tout $i, j \in \{1,2\}$, $B'_{ij}(a'_i, b'_j)$ et $A^{-1}_{ji}(a'_i, b'_j)$ et pour tout $i, j \in \{1,2\}$, $B''_{ij}(a''_i, b''_j)$ et $A^{-1}_{ji}(a''_i, b''_j)$. Par conséquent, pour tout $i, j \in \{1,2\}$, $B'_{ij} = A^{-1}_{ji}$ et pour tout $i, j \in \{1,2\}$, $B''_{ij} = A^{-1}_{ji}$. Par conséquent, pour tout $i, j \in \{1,2\}$, $B'_{ij} = B''_{ij}$. Par conséquent, $B' = B''$. ⊣

Soit $A, B \in \mathcal{A}_{46}$.

Proposition 4 *Si C est une relation atomique potentielle telle que pour tout $i, j \in \{1,2\}$, $C_{i,1} \in C_{i,2} \circ PPI$, $C_{i,2} \in C_{i,1} \circ PP$, $C_{1,j} \in PP \circ C_{2,j}$ et $C_{2,j} \in PPI \circ C_{1,j}$ et pour tout $i, j, k \in \{1,2\}$, $C_{ij} \in A_{ik} \circ B_{kj}$ alors C est consistante.*

Démonstration : Supposons que C soit une relation atomique potentielle telle que pour tout $i, j \in \{1,2\}$, $C_{i,1} \in C_{i,2} \circ PPI$, $C_{i,2} \in C_{i,1} \circ PP$, $C_{1,j} \in PP \circ C_{2,j}$ et $C_{2,j} \in PPI \circ C_{1,j}$ et pour tout $i, j, k \in \{1,2\}$, $C_{ij} \in A_{ik} \circ B_{kj}$. Dans ce cas, le réseau de contraintes $RCC5$ suivants (à 6 variables x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) est chemin-consistant : $x_i A_{i,k} y_k$, $y_k B_{k,j} z_j$, $x_i C_{i,j} z_j$, $x_1 PP x_2$, $y_1 PP y_2$, $z_1 PP z_2$. Puisqu'il est atomique, alors il est aussi consistant. Par conséquent, la relation atomique potentielle C est consistante. ⊣

Comme le lecteur peut lui-même le constater, il existe une plus petit ensemble $R \subseteq \mathcal{A}_{46}$ de relations primitives, dénoté $A \circ B$ et appelé composition de A et B, tel que pour toute relation atomique potentielle C entre régions indéterminées qualitatives, si pour tout $i, j, k \in \{1,2\}$, $C_{ij} \in A_{ik} \circ B_{kj}$ alors $C \in R$.

Proposition 5 *$A \circ B$ le plus petit ensemble $R \subseteq \mathcal{A}_{46}$ de relations primitives tel que pour toute relation atomique potentielle C entre régions indéterminées qualitatives, s'il existe des régions indéterminées qualitatives a, b et c telles que $C(a,b)$, $A(a,c)$ et $B(c,b)$ alors $C \in R$.*

Démonstration : Soit C une relation atomique potentielle entre régions indéterminées qualitatives pour laquelle il existe des régions indéterminées qualitatives a, b et c telles que $C(a,b)$, $A(a,c)$ et $B(c,b)$. Par conséquent, pour tout $i, j, k \in \{1,2\}$, $C_{ij}(a_i, b_j)$, $A_{ik}(a_i, c_k)$ et $B_{kj}(c_k, b_j)$. Par conséquent, pour tout $i, j, k \in \{1,2\}$, $C_{ij} \in A_{ik} \circ B_{kj}$. ⊣

Une partie de $\mathcal{A}_{46}$ est appelée relation complexe de $\mathcal{A}_{46}$.

3.3 Représentations faibles

Soit $\mathcal{R}_5$ l'ensemble des relations complexes de $\mathcal{A}_5$. Bien entendu, $Card(\mathcal{R}_5) = 2^5$. Pour tout $R, S \in \mathcal{R}_5$, nous définissons

- $0 = \emptyset$,
- $-R = \mathcal{A}_5 \setminus R$,
- $R \sqcup S = R \cup S$,
- $id = EQ$,
- $R^{-1} = \{A^{-1} : A \in R\}$,
- $R \circ S = \sqcup\{A \circ B : A \in R \text{ et } B \in S\}$.

Proposition 6 $(\mathcal{R}_5, 0, -, \sqcup, id, ^{-1}, \circ)$ *est une algèbre de relations faiblement représentable, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble U non-vide et une fonction* $\varphi : \mathcal{R}_5 \longrightarrow 2^{U \times U}$ *tels que* $\varphi(0) = \emptyset$ *et pour tout* $R, S \in \mathcal{R}_5$, $\varphi(-R) = 2^{U\times U} \setminus \varphi(R)$, $\varphi(R \sqcup S) = \varphi(R) \cup \varphi(S)$, $\varphi(id) = Id_U$, $\varphi(R^{-1}) = \varphi(R)^{-1}$ *et* $\varphi(R \circ S) \supseteq \varphi(R) \circ \varphi(S)$.

Démonstration : Soit $U = \mathbb{Z}$. Pour tout $R \in \mathcal{R}_5$, soit $\varphi(R)$ l'ensemble des couples (a, b) de régions qualitatives de $\mathbb{Z}$ pour lesquels il existe $A \in R$ tel que $A(a, b)$. Comme le lecteur peut lui-même le constater, (U, φ) est une représentation faible de $(\mathcal{R}_5, 0, -, \sqcup, id, ^{-1}, \circ)$ telle que $\varphi(PP) \neq \emptyset$. ⊣

Soit $\mathcal{R}_{46}$ l'ensemble des relations complexes de $\mathcal{A}_{46}$. Bien entendu, $Card(\mathcal{R}_{46}) = 2^{46}$. Pour tout $R, S \in \mathcal{R}_{46}$, nous définissons

— $0 = \emptyset$,

— $-R = \mathcal{A}_{46} \setminus R$,

— $R \sqcup S = R \cup S$,

— $id = \begin{pmatrix} EQ & PP \\ PPI & EQ \end{pmatrix}$,

— $R^{-1} = \{A^{-1} : A \in R\}$,

— $R \circ S = \sqcup\{A \circ B : A \in R \text{ et } B \in S\}$.

Proposition 7 $(\mathcal{R}_{46}, 0, -, \sqcup, id, ^{-1}, \circ)$ *est une algèbre de relations faiblement représentable.*

Démonstration : Soit (U, φ) une représentation faible de $(\mathcal{R}_5, 0, -, \sqcup, id, ^{-1}, \circ)$ telle que $\varphi(PP) \neq \emptyset$. Soit (U', φ') où $U' = \varphi(PP)$ et pour toute relation atomique potentielle consistante A, $\varphi'(A) = \{((u_1, u_2), (v_1, v_2)) : \text{pour tout } i, j \in \{1, 2\}, (u_i, v_j) \in \varphi(A_{i,j})\}$. Alors (U', φ') est une interprétation faible de $(\mathcal{R}_{46}, 0, -, \sqcup, id, ^{-1}, \circ)$. ⊣

Voir [20] pour une étude détaillée de représentations faibles d'algèbres de relations qualitatives.

4 Réseaux de contraintes

Nous nous attaquons maintenant au problème de la résolution de réseaux de contraintes qualitatives du calcul Egg-Yolk.

4.1 Réseaux de contraintes qualitatives

Un réseau de contraintes qualitatives (RCQ) du calcul Egg-Yolk (respectivement, du calcul $RCC5$) est un couple $\mathcal{N} = (V, C)$ constitué d'un ensemble non-vide V de variables représentant des entités spatiales et d'une fonction C de $V \times V$ vers $\mathcal{R}_{46}$ (respectivement, $\mathcal{R}_5$) définissant des agencements possibles entre les entités spatiales considérées. Nous dirons qu'un RCQ $\mathcal{N} = (V, C)$ est non-vide (respectivement, atomique) ssi pour tout $v, v' \in V$, $Card(C(v, v')) \geq 1$ (respectivement, $Card(C(v, v')) = 1$).

4.2 RCQ cohérents

Etant donné un RCQ $\mathcal{N} = (V, C)$ du calcul Egg-Yolk (respectivement, du calcul $RCC5$), nous dirons que $\mathcal{N}$ est cohérent ssi il existe un ensemble non-vide X et une application α associant à chaque $v \in V$ une région indéterminée $\alpha(v)$ de X (respectivement, une région $\alpha(v)$ de X) telle que pour tout $v, v' \in V$, il existe $A \in C(v, v')$ telle que $A(\alpha(v), \alpha(v'))$. Une telle application sera appelée solution de $\mathcal{N}$. Un scénario $\mathcal{S}$ de $\mathcal{N}$ sur l'ensemble de variables $V' \subseteq V$ est un RCQ atomique (V', C') tel que $C'(v, v') \subseteq C(v, v')$ pour tout $v, v' \in V'$. Le problème de la cohérence des réseaux de contraintes qualitatives du calcul Egg-Yolk (respectivement, du calcul $RCC5$) est le suivant :

— étant donné un RCQ $\mathcal{N} = (V, C)$ du calcul Egg-Yolk (respectivement, du calcul $RCC5$), déterminer si $\mathcal{N}$ est cohérent ou non.

Montrons que le problème de la cohérence du calcul Egg-Yolk est, comme le problème de la cohérence de RCC5 [26], un problème NP-complet.

Proposition 8 *Le problème de la cohérence des réseaux de contraintes qualitatives atomiques entre régions indéterminées est dans P.*

Démonstration : Il suffit de remarquer que le problème de la cohérence des réseaux de contraintes qualitatives atomiques entre régions indéterminées qualitatives est polynomialement réductible au problème de la cohérence des réseaux de contraintes qualitatives atomiques de $RCC5$. Ce dernier étant dans P [15, 26], il s'ensuit que le problème de la cohérence des réseaux de contraintes qualitatives atomiques entre régions indéterminées est dans P. ⊣

Proposition 9 *Le problème de la cohérence des réseaux de contraintes qualitatives entre régions indéterminées est dans NP.*

Démonstration : Il suffit de remarquer que l'algorithme consistant à effectuer l'opération de choix suivante et à vérifier si le réseau de contraintes atomiques résultant est cohérent constitue une procédure non-déterministe permettant de décider le problème de la cohérence des réseaux de contraintes qualitatives entre régions indéterminées :

— pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ faire

  — choisir A dans $C(i, j)$; $C(i, j) := \{A\}$.

⊣

Proposition 10 *Le problème de la cohérence des réseaux de contraintes qualitatives entre régions indéterminées est NP-difficile.*

Démonstration : Il suffit de remarquer que le problème de la cohérence des réseaux de contraintes qualitatives entre régions est polynomialement réductible au problème de la cohérence des réseaux de contraintes qualitatives entre régions indéterminées. ⊣

4.3 Fermeture algébrique des RCQ

Nous employons le terme de sous-classe de relations pour désigner un ensemble de relations fermé pour les opérations $^{-1}$, $\cap$ et $\circ$. Dans la suite de cette section, nous allons caractériser des sous-classes de relations de $\mathcal{R}_{46}$ pour lesquels le problème de la cohérence des RCQ entre régions indéterminées qualitatives est un problème polynomial. Nous montrerons en particulier que pour certaines sous-classes de relations de $\mathcal{R}_{46}$ la méthode polynomiale du calcul de la fermeture algébrique d'un RCQ est une méthode complète pour le problème de la cohérence. Avant de poursuivre, rappelons qu'étant donné un RCQ $\mathcal{N} = (V, C)$, $\mathcal{N}$ est dit algébriquement clos [22] ssi pour tout $v, v', v'' \in V$, $C(v, v'') \subseteq C(v, v') \circ C(v', v'')$. Dans la littérature, les termes de RCQ chemin-cohérents, ou encore faiblement chemin-cohérents sont également utilisés. Voir [1] pour l'utilisation d'autres formes de cohérence. Etant donné un RCQ $\mathcal{N} = (V, C)$, la méthode du calcul de la fermeture algébrique consiste à calculer le plus large sous-réseau de $\mathcal{N}$ algébriquement clos en itérant l'opération de triangulation $C(v, v') \leftarrow C(v, v') \cap (C(v, v'') \circ C(v'', v'))$ pour tout triplet de variables $v, v', v'' \in V$ jusqu'à ce qu'un point fixe soit atteint. Cette méthode peut être implantée en $O(Card(V)^3)$ [6].

4.4 Approximation des RCQ

Un RCQ entre régions indéterminées peut être approximé par un réseau de contraintes de $RCC5$ en projetant ses contraintes sur les régions composant les régions indéterminées. Formellement, ce RCQ de $RCC5$ est défini de la manière suivante. Soit $\mathcal{N} = (V = \{v_1, \ldots, v_n\}, C)$, avec $n \leq 1$, un RCQ non-vide du calcul Egg-Yolk. $\mathsf{RCC5}(\mathcal{N})$ est le réseau de contraintes qualitatives de $RCC5$ (V', C') défini par :

- pour chaque variable $v_i \in V$, avec $i \in \{1, \ldots, n\}$ est introduit deux variables v_i^1 et v_i^2 dans V' correspondant aux deux régions de la région indéterminée représentée par v_i ;
- pour tout v_i^j, v_k^l avec $i, k \in \{1, \ldots, n\}$ et $j, l \in \{1, 2\}$, $C'(v_i^j, v_k^l) = \{A_{jl} : A \in C(v_i, v_k)\}$.

Notons que dans le cas général, une solution du RCQ $\mathsf{RCC5}(\mathcal{N})$ n'est pas solution du réseau de contraintes qualitatives du calcul Egg-Yolk $\mathcal{N}$ contrairement à des cas particuliers que nous caractériserons par la suite.

Lemme 11 *Soit $\mathcal{N}$ un RCQ entre régions indéterminées. Si $\mathcal{N}$ est non-vide et algébriquement clos alors* $\mathsf{RCC5}(\mathcal{N})$ *est un réseau de contraintes qualitatives de $RCC5$ non-vide et algébriquement clos.*

Démonstration : Supposons que $\mathcal{N} = (V, C)$ est non-vide et algébriquement clos où $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Par définition du RCQ $\mathsf{RCC5}(\mathcal{N}) = (V', C')$, il est immédiat que $\mathsf{RCC5}(\mathcal{N})$ est non-vide. Montrons que $\mathsf{RCC5}(\mathcal{N})$ est algébriquement clos. Soit $V' = \{v_1^1, v_1^2, \ldots, v_n^1, v_n^2\}$. Considérons trois variables $v_i^j, v_k^l, v_m^o \in V'$ et une relation atomique $A' \in C'(v_i^j, v_m^o)$. Montrons que $A' \in C'(v_i^j, v_k^l) \circ C'(v_k^l, v_m^o)$. Du fait que $A' \in C'(v_i^j, v_m^o)$, par définition de C' nous savons qu'il existe $A \in C(v_i, v_m)$ telle que $A' = A_{jo}$. D'autre part, comme $\mathcal{N}$ est algébriquement clos, il existe deux relations atomiques $B \in C(v_i, v_k)$ et $C \in C(v_k, v_m)$ telles que $A \in B \circ C$. Puisque $B \in C(v_i, v_k)$ et $C \in C(v_k, v_m)$, nous avons $B_{jl} \in C'(v_i^j, v_k^l)$ et $C_{lo} \in C'(v_k^l, v_m^o)$. D'autre part, comme $A \in B \circ C$, nous pouvons affirmer que $A_{jo} \in B_{jl} \circ C_{lo}$. De tout ceci nous pouvons en déduire que $A' \in C'(v_i^j, v_k^l) \circ C'(v_k^l, v_m^o)$. Ainsi, nous pouvons conclure que $\mathsf{RCC5}(\mathcal{N})$ est algébriquement clos. ⊣

Dans la suite, étant donnés une relation $R \in \mathcal{R}_{46}$ et deux entiers $i, j \in \{1, 2\}$, R_{ij} dénotera la relation de $RCC5$ définie par $R_{ij} = \{A_{ij} : A \in R\}$. Les ensembles de relations des régions indéterminées que nous allons considérer par la suite seront construites à partir d'ensemble de relations de $RCC5$ de la manière suivante. Soit $E \subseteq \mathcal{R}_5$ un ensemble de relations des régions. $E^\times$ est le sous-ensemble de relations de $\mathcal{R}_{46}$ contenant l'ensemble des relations $R \in \mathcal{R}_{46}$ satisfaisant les propriété suivantes : (1) pour tout $i, j \in \{1, 2\}$, $R_{ij} \in E$ et (2) pour toute relation atomique $A \in \mathcal{A}_{46}$ telle que $A_{ij} \in R_{ij}$ pour tout $i, j \in \{1, 2\}$, $A \in R$. Une sous-classe est dite traitable lorsque le problème de la cohérence des RCQ définis à partir des relations de cette sous-classe est un problème polynomial. Parmi les sous-classes traitables de $RCC5$, nous considèrerons $\mathcal{S}_5$, la plus petite sous-classe (pour l'inclusion) de $RCC5$ contenant l'ensemble des relations singletons, $\mathcal{D}_5^{14}$ et $\mathcal{D}_5^{20}$ les deux sous-classes étudiées dans [23] et $\mathcal{H}_5$ [26] la sous-classe des relations de Horn de $RCC5$ connu pour être l'unique sous-classe maximale traitable pour le problème de la cohérence incluant l'ensemble des 5 relations singletons de $RCC5$. Voir [15] pour une classification complète des classes traitables de $RCC5$. Les sous-classes $\mathcal{S}_5$, $\mathcal{D}_5^{14}$, $\mathcal{D}_5^{20}$ et $\mathcal{H}_5$ contiennent respectivement 12, 14, 20 et 27 relations sans compter la relation vide. D'autre part, nous avons $\mathcal{S}_5 \subset \mathcal{D}_5^{14} \subset \mathcal{H}_5$ et $\mathcal{S}_5 \subset \mathcal{D}_5^{20} \subset \mathcal{H}_5$. Par programme, nous pouvons déterminer que les ensembles $\mathcal{S}_5^\times$, $(\mathcal{D}_5^{14})^\times$, $(\mathcal{D}_5^{20})^\times$ et $\mathcal{H}_5^\times$ contiennent respectivement 638, 826, 2560 et 6543 relations sans compter la relation vide. D'autre part, des inclusions précédentes nous avons : $\mathcal{S}_5^\times \subset (\mathcal{D}_5^{14})^\times \subset \mathcal{H}_5^\times$ et $\mathcal{S}_5^\times \subset (\mathcal{D}_5^{20})^\times \subset \mathcal{H}_5^\times$.

Exemple 1 *A titre d'illustration considérons la relation $R \in \mathcal{R}_{46}$ définie par :*

$R = \{\begin{pmatrix} DR & PP \\ PO & PO \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} DR & PP \\ PPI & PO \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} PO & PP \\ PO & PO \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} PO & PP \\ PPI & PO \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} PPI & PP \\ PPI & PO \end{pmatrix}\}$. *R est une relation appartenant à $\mathcal{S}_5^\times$. Nous pouvons en effet vérifier que $R_{11} = \{DR, PO, PPI\}$, $R_{12} = \{PP\}$, $R_{21} = \{PO, PPI\}$, $R_{22} = \{PO\}$ sont des relations de $\mathcal{S}_5$ et que pour toute relation atomique $A \in \mathcal{A}_{46}$ telle que $A_{ij} \in R_{ij}$ pour tout $i, j \in \{1, 2\}$ nous avons $A \in R$.*

Etant donnée $E \subseteq \mathcal{R}_5$ un ensemble de relations de $RCC5$ contenant la relation universelle (la relation contenant les 5 relations de base) et une relation $R \in \mathcal{R}_5$, nous noterons par $E(R)$ la plus petite relation (pour l'inclusion) de E incluant R. D'autre part, pour toute relation $R \in \mathcal{R}_{46}$, $E(R)$ dénotera la relation de $\mathcal{R}_{46}$ définie par $E(R) = \{A \in \mathcal{A}_{46}$ tel que $A_{ij} \in E(R_{ij})$ pour tout $i, j \in \{1, 2\}\}$. Nous pouvons montrer la propriété suivante :

Lemme 12 *Soit $E \subseteq \mathcal{R}_5$ un ensemble de relations des régions contenant la relation universelle. Pour tout $R \in \mathcal{R}_{46}$, $R \in E^\times$ ssi $E(R) = R$.*

4.5 Sous-classes traitables

Etant donné $\mathcal{N} = (V, C)$ un réseau de contraintes qualitatives de $RCC5$ (respectivement, de l'agèbre des régions indéterminées), nous dénoterons par $E(\mathcal{N})$ le réseau de contraintes (E, C') de $RCC5$ (respectivement, de l'agèbre des régions indéterminées) défini par $C'(i, j) = E(C(i, j))$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. D'autre part, nous serons par la suite concerné par la propriété de faible globale cohérence des RCQ qui se défini de la manière suivante [23] : un RCQ $\mathcal{N} = (V, C)$ est faiblement globallement cohérent ssi tout scénario cohérent de $\mathcal{N}$ sur $V' \subseteq V$ peut être étendu en un scénario cohérent de $\mathcal{N}$ sur V.

Lemme 13 *Soit $E \subseteq \mathcal{R}_5$ une sous-classe de $RCC5$ contenant la relation universelle. Si tout RCQ défini sur E algébriquement clos et non vide est un RCQ faiblement globalement cohérent alors $E^\times$ est une sous-classe de $\mathcal{R}_{46}$.*

Démonstration : Montrons que $E^\times$ est fermé pour les opérations $^{-1}$, $\cap$ et $\circ$.

- Fermeture pour $^{-1}$. Soit $R \in E^\times$ et considérons la relation $T = R^{-1}$. Clairement, pour tout $i, j \in \{1, 2\}$ nous avons $T_{ij} = (R^{-1})_{ij} = (R_{ji})^{-1}$. Puisque $R_{ij} \in E$ et que E est un ensemble fermé pour $^{-1}$, nous pouvons affirmer que $(R_{ji})^{-1} \in E$ pour tout $i, j \in E$. Ainsi, $T_{ij} = E(T_{ij})$ pour tout $i, j \in E$. Par conséquent, nous pouvons affirmer que $T = E(T)$ et que donc $T = R^{-1} \in E^\times$.
- Fermeture pour $\cap$. Soient $R, S \in E^\times$ et considérons la relation $T = R \cap S$. Montrons que $E(T) = T$. Par définition de $E(T)$ il est clair que $T \subseteq E(T)$. Montrons que $E(T) \subseteq T$. Soit A une relation atomique de $\mathcal{A}_{46}$ telle que $A \in E(T)$. Pour tout $i, j \in \{1, 2\}$, nous avons $A_{ij} \in E(T_{ij})$. Ainsi, $A_{ij} \in E((R \cap S)_{ij}) \subseteq E(R_{ij} \cap S_{ij}) \subseteq E(R_{ij}) \cap E(S_{ij})$ pour tout $i, j \in \{1, 2\}$. Nous savons que $E(R_{ij}) = R_{ij}$ et $E(S_{ij}) = S_{ij}$. Ainsi, $A_{ij} \in R_{ij} \cap S_{ij}$ pour tout $i, j \in \{1, 2\}$. Il en résulte que $A_{ij} \in R_{ij}$ et $A_{ij} \in S_{ij}$ pour tout $i, j \in \{1, 2\}$. Ainsi, $A \in R$ et $A \in S$. Nous pouvons en conclure que $A \in (R \cap S)$.
- Fermeture pour $\circ$. Soient $R, S \in E^\times$ et considérons la relation $T = R \circ S$. Montrons que $E(T) \subseteq R \circ S$. Considérons le réseau de contraintes qualitatives du calcul Egg-Yolk $\mathcal{N} = (V = \{v_1, v_2, v_3\}, C)$ avec $C(v_1, v_2) = R$, $C(v_2, v_3) = S$ et $C(v_1, v_3) = T$. D'après le lemme 11 nous avons $\mathcal{N}' = \mathsf{RCC5}(\mathcal{N})$ qui est un réseau de contraintes de $RCC5$ non-vide et algébriquement clos. De cela, nous pouvons montrer que $\mathcal{N}'' = E(\mathcal{N}')$ est également un réseau de contraintes de $RCC5$ non-vide et algébriquement clos. De plus, notons que toutes les contraintes de $\mathcal{N}''$ sont définis par une relation appartenant à E. Du fait de la propriété posée par hypothèse sur l'ensemble E, nous pouvons affirmer que $\mathcal{N}''$ est un RCQ faiblement globalement cohérent et non-vide. Soit A une relation atomique de $\mathcal{A}_{46}$ appartenant à $E(T)$. Du fait que $\mathcal{N}''$ est un RCQ faiblement globalement cohérent, nous pouvons affirmer que le réseau cohérent de contraintes atomiques défini sur l'ensemble de variables $\{v_1^1, v_1^2, v_3^1, v_3^2\}$ et par les contraintes $C(v_1^i, v_3^j) = A_{ij}$ pour tout $i, j \in \{1, 2\}$, peut être étendu en un scénario cohérent de $\mathcal{N}''$. Ainsi, nous pouvons affirmer que $A \in E(R) \circ E(S)$. Du fait que $E(R) = R$ et $E(S) = S$, nous pouvons en déduire que $A \in R \circ S$. Par conséquent, $E(T) \subseteq T$. Il s'ensuit que $E(T) = T$. Nous pouvons en conclure que $T = R \circ S$ est une relation de $E^\times$.

$\dashv$

Long et Li [23] ont montré que tout réseau de contraintes qualitatives de $RCC5$ algébriquement-clos et défini par des relations de $\mathcal{D}_5^{14}$ ou des relations de $\mathcal{D}_5^{20}$ est un RCQ faiblement globallement cohérent (contrairement aux RCQ définis sur $\mathcal{H}_5$). A partir de cela et du lemme 13 nous pouvons en déduire la propriété suivante :

Proposition 11 *Les ensembles $\mathcal{S}_5{}^\times$, $(\mathcal{D}_5^{14})^\times$, $(\mathcal{D}_5^{20})^\times$ sont des sous-classes du calcul Egg-Yolk.*

En examinant la preuve du lemme 13 nous pouvons remarquer qu'une propriété suffisante pour $E^\times$ de $\mathcal{R}_{46}$ (avec $E \subseteq \mathcal{R}_5$) soit clos pour les opérations $^-1$ et $\cap$ est que E soit également clos pour $^-1$ et $\cap$. Ainsi, nous pouvons affirmer que l'ensemble $\mathcal{H}_5^\times$ est clos pour les opérations $^-1$ et $\cap$. Néamoins, comme le montre l'exemple suivant, $\mathcal{H}_5^\times$ n'est pas une sous-classe du fait que cet ensemble n'est pas fermé pour l'opération de composition.

Exemple 2 *Considérons les relations $R, S, T \in \mathcal{R}_{46}$ définies par :*

$R = \{\begin{pmatrix} EQ & PP \\ PPI & PPI \end{pmatrix}\}$, $S = \{\begin{pmatrix} DR & DR \\ DR & DR \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} DR & PP \\ PPI & EQ \end{pmatrix}\}$,
$T = \{\begin{pmatrix} DR & DR \\ DR & DR \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} DR & DR \\ DR & PO \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} DR & DR \\ PO & PO \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} DR & DR \\ PPI & PO \end{pmatrix},$
$\begin{pmatrix} DR & DR \\ PPI & PPI \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} DR & PP \\ PPI & PPI \end{pmatrix}\}$. *R et S sont deux relations appartenant à $\mathcal{H}_5^{\times}$, tandis que $T = R \circ S$ n'est pas une relation de $\mathcal{H}_5^{\times}$.*

Lemme 14 *Soit $E \subseteq \mathcal{R}_5$ un ensemble de relations de RCC5. Si tout RCQ défini sur E non vide et algébriquement clos est cohérent alors tout RCQ $\mathcal{N}$ défini sur $E^{\times}$ non vide et algébraiquement clos est cohérent.*

Démonstration : Soit un RCQ $\mathcal{N}$ défini sur $E^{\times}$ non vide et algébraiquement clos. Soit $\mathcal{N}' = \mathsf{RCC5}(\mathcal{N})$. Nous pouvons montrer que $\mathcal{N}'$ est non-vide, algébriquement clos et défini sur E. Ainsi, $\mathcal{N}'$ est cohérent. D'autre part, nous pouvons montrer que tout solution de $\mathcal{N}'$ est solution de $\mathcal{N}$. Il en résulte que $\mathcal{N}$ est cohérent. ⊣

Lemme 15 *Soit $E \subseteq \mathcal{R}_5$ une sous-classe de relations de RCC5. Si tout RCQ défini sur E non vide et algébriquement clos est faiblement globalement cohérent alors la méthode de la fermeture algébrique est complète pour le problème de la cohérence de tout RCQ entre régions indéterminées défini sur $E^{\times}$.*

Démonstration : Soit $\mathcal{N} = (V, C)$ un réseau de contraintes qualitatives des régions indéterminées défini sur $E^{\times}$. La méthode de la fermeture algébrique consiste à itérer l'opération de triangulation $C(v, v') \leftarrow C(v, v') \cap (C(v, v'' \circ C(v'', v')))$ pour tout triplet de variables v, v', v'' jusqu'à ce qu'un point fixe soit atteitnt ou que le réseau de contraintes ne soit plus non-vide. Dans ce deuxième cas, nous pouvons affirmer que le réseau de contraintes initial est non cohérent. Dans le premier cas, nous pouvons affirmer que le RCQ obtenu est équivalent au réseau initial, non-vide, défini par des relations de $E^{\times}$ (puisque $E^{\times}$ est une sous-classe) et est algébriquement clos. Nous pouvons en conclure que ce réseau de contraintes, ainsi que le réseau initial, admettent une solution et sont donc cohérents. ⊣

A partir de ce qui précède, nous pouvons en déduire la propriété suivante :

Proposition 12 *La méthode de la fermeture algébrique est complète pour le problème de la cohérence de tout RCQ défini sur $\mathcal{S}_5{}^{\times}$, $(\mathcal{D}_5^{14})^{\times}$ ou encore $(\mathcal{D}_5^{20})^{\times}$.*

5 Conclusion

Beaucoup reste à faire.

Les parties maximales de l'algèbre qualitative *RCC*5 pour lesquelles le problème de la consistance de réseaux de contraintes est dans *P* ont été répertoriées avec précision [15]. Dans le cadre du raisonnement sur les relations entre régions indéterminées, pouvons-nous caractériser les parties maximales de l'ensemble de nos 46 relations primitives pour lesquelles le problème de la consistance de réseaux de contraintes est dans *P* ?

Si nous nous intéressons maintenant à des régions (a_1, a_2) où a_1 et a_2 sont des fermés réguliers de l'espace des réels tels que $a_1 \subseteq a_2$, les relations primitives entre des entités (a_1, a_2) et (b_1, b_2) de ce type sont déterminées par les différentes possibilités qu'il y a de situer dans l'espace les fermés réguliers a_1, a_2, b_1 et b_2 tout en préservant les contraintes $a_1 \subseteq a_2$ et $b_1 \subseteq b_2$. Quelles sont ces relations primitives ? Quid du problème de la consistance de réseaux de contraintes exprimés dans ce cadre ?

Remerciements

Nous tenons à remercier les rapporteurs auxquels le comité scientifique de JIAF 2017 a fait appel et qui ont contribué à la maturation du travail que nous présentons aujourd'hui.

Références

[1] Amaneddine, N., Condotta, J.-F., Sioutis, M. : *Efficient approach to solve the minimal labeling problem of temporal and spatial qualitative constraints.* In : Proceedings of the Twenty-Third International Joint Conference on Artificial Intelligence. AAAI Press (2013) 696–702.

[2] Balbiani, P., Gencer, Ç. : *Admissibility and unifiability in contact logics.* In : Logic, Language, and Computation. Springer (2015) 44–60.

[3] Balbiani, P., Tinchev, T., Vakarelov, D. : *Modal logics for region-based theories of space.* Fundamenta Informaticæ **81** (2007) 29–82.

[4] Beaubouef, T., Petry, F. : *Vagueness in spatial data : rough set and egg-yolk approaches.* In : *Engineering of Intelligent Systems.* Springer-Verlag (2001) 367–373.

[5] Beaubouef, T., Petry, F., Ladner, R. : *Spatial data methods and vague regions : a rough set approach.* Applied Soft Computing **7** (2007) 425–440.

[6] van Beek, P. : *Approximation Algorithms for Temporal Reasoning.* In : the Proceedings of the 11th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'89), 1291–1296.

[7] Bennett, B. : *What is a forest ? On the vagueness of certain geographic concepts.* Topoi **20** (2001) 189–201.

[8] Clementini, E., Di Felice, P. : *Approximate topological relations.* International Journal of Approximate Reasoning **16** (1997) 173–204.

[9] Cohn, A., Bennett, B., Gooday, J., Gotts, N. : *Representing and reasoning with qualitative spatial relations about regions.* In : *Spatial and Temporal Reasoning.* Kluwer Academic Publishers (1997) 97–134.

[10] Cohn, A., Bennett, B., Gooday, J., Gotts, N. : *Qualitative spatial representation and reasoning with the Region Connection Calculus.* GeoInformatica **1** (1997) 275–316.

[11] Cohn, A., Gotts, N. : *The 'Egg-Yolk' representation of regions with indeterminate boundaries.* In : *Geographic Objects with Indeterminate Boundaries.* Taylor & Francis (1996) 171–188.

[12] Cohn, A., Hazarika, S. : *Qualitative spatial representation and reasoning : an overview.* Fundamenta Informaticæ**46** (2001) 1–29.

[13] Cohn, A., Renz, J. : *Qualitative spatial representation and reasoning.* In : Handbook of Knowledge Representation. Elsevier (2008) 551–596.

[14] Hois, J., Bhatt, M., Kutz, O. : *Modular ontologies for architectural design.* In : *Formal Ontologies meet Industry.* IOS Press (2009) 66–77.

[15] Jonsson, P., Drakengren, T. : *A complete classification of tractability in RCC-*5. Journal of Artificial Intelligence research **6** (1997) 211–221.

[16] Kontchakov, R., Nenov, Y., Pratt-Hartmann, I., Zakharyaschev, M. : *Topological logics with connectedness over Euclidean spaces.* ACM Transactions on Computational Logic **14** (2013) DOI : 10.1145/2480759.2480765.

[17] Kontchakov, R., Pratt-Hartmann, I., Wolter, F., Zakharyaschev, M. : *Spatial logics with connectedness predicates.* Logical Methods in Computer Science **6** (2010) 1–43.

[18] Kontchakov, R., Pratt-Hartmann, I., Zakharyaschev, M. : *Interpreting topological logics over Euclidean spaces.* In : Proceedings of the Twelfth International Conference on the Principles of Knowledge Representation and Reasoning. AAAI Press (2010) 534–544.

[19] Li, S., Ying, M. : *Region Connection Calculus : its model and composition table.* Artificial Intelligence **145** (2003) 121–146.

[20] Ligozat, G. : *Simple models for simple calculi.* In : *Spatial Information Theory.* Springer-Verlag (1999) 173–188.

[21] Ligozat, G., Mitra, D., Condotta, J.-F. : *Spatial and temporal reasoning : beyond Allen's calculus.* AI Communications **17** (2004) 223–233.

[22] Ligozat, G., Renz, J. : *What is a qualitative calculus ? A general framework.* In : *PRICAI 2004 : Trends in Artificial Intelligence.* Springer-Verlag (2004) 53–64.

[23] Long, L., Li, S. : *On Distributive Subalgebras of Qualitative Spatial and Temporal Calculi.* In : the Proceedings of the 12th International Conference Spatial Information Theory (COSIT'15), LNCS 9368, 354-374.

[24] Randell, D., Cui, Z., Cohn, A. : *A spatial logic based on regions and connection.* In : Proceedings of the Third International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning. Morgan Kaufman (1992) 165–176.

[25] Renz, J. : *Qualitative Spatial Reasoning with Topological Information.* Springer (2002).

[26] Renz, J., Nebel, B. : *On the complexity of qualitative spatial reasoning : a maximal tractable fragment of the Region Connection Calculus.* Artificial Intelligence **108** (1999) 69–123.

[27] Roy, A., Stell, J. : *Spatial relations between indeterminate regions.* International Journal of Approximate Reasoning **27** (2001) 205–234.

[28] Tinchev, T., Vakarelov, D. : *Logics of space with connectedness predicates : complete axiomatizations.* In : *Advances in Modal Logic.* College Publications (2010) 434–453.

[29] Wölfl, S., Westphal, M. : *On combinations of binary qualitative constraint calculi.* In : Proceedings of the Twenty-First International Joint Conference on Artificial Intelligence. AAAI Press (2009) 967–972.

[30] Wolter, F., Zakharyaschev, M. : *Spatio-temporal representation and reasoning based on RCC-*8. In : Proceedings of the Seventh International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning. Morgan Kaufmann (2000) 3–14.

[31] Worboys, M., Clementini, E. : *Integration of imperfect spatial information.* Journal of Visual Languages and Computing **12** (2001) 61–80.