Une formulation SAT pour l'apprentissage de modèles de classement multicritères non-compensatoires

K. Belahcène[1] **C. Labreuche**[2] **N. Maudet**[3] **V. Mousseau**[1] **W. Ouerdane**[1]

[1] LGI, CentraleSupélec, Université Paris-Saclay, Châtenay-Malabry, France
[2] Thales Research & Technology, 91767 Palaiseau Cedex, France
[3] Sorbonne Universités, UPMC Univ Paris 06, CNRS, LIP6 UMR 7606, 75005 Paris
`nom.prenom@{centralesupelec.fr,thalesgroup.com, lip6.fr}`

Résumé

La littérature en aide à la décision multicritère (MCDA) offre une variété de méthodes pour affecter des alternatives, évaluées sur de multiples attributs, à des catégories ordonnées. Les modèles de tri non-composentatoire (NCS) affectent des alternatives à des catégories en les comparant à des profiles délimitant ces catégories. Plusieurs travaux ont proposé des approches, basées sur un ensemble d'apprentissage, pour ajuster les paramètres d'un modèle NCS. Les approches exactes, basées sur la programmation linéaire mixte, garantissent que l'ensemble d'apprentissage soit restauré, mais peuvent difficilement prendre en charge de larges ensembles de données. Les approches heuristiques quant à elles peuvent prendre en charge de larges ensembles d'apprentissage mais n'offrent pas de garantie sur le modèle inféré. Dans ce papier, nous proposons une formulation alternative pour ajuster le modèle NCS. Cette formulation, basée sur un problème SAT, garantie de trouver le modèle le plus consistent avec l'ensemble d'apprentissage, et est computationnellement plus efficace que les approches MIP existantes.

1 Introduction

L'aide à la décision multicritères (MCDA) a pour objectif d'aider un décideur (DM) à prendre des décisions concernant des options évaluées selon différents points de vue, représentés formellement par des fonctions monotones appelées *critères*. Dans cet article, nous nous intéressons à un problème de classement ordinal, où les options doivent être affectées à des catégories, prédéfinies, et ordonnées entre elles.

Nous abordons donc un problème de classement ordinal avec un modèle non-compensatoire (NCS, cf. [1, 2]) dans lequel les catégories sont définies par un profil de limite inférieure. Ces profils spécifient les évaluations minimales sur chaque critère pour qu'un objet soit affecté dans une catégorie au-dessus du profil considéré. En fait, une option n'a pas besoin d'être aussi bonne que le profil sur tous les critères. Un cas particulier de NCS consiste à considérer que la famille de coalitions suffisantes de critères peut être définie à l'aide de poids additifs sur les critères et d'un seuil. Ce modèle est connu sous le nom de MR-Sort (voir e.g. [4, 6]). En fait, MR-Sort et NCS sont tous deux des cas particuliers du modèle Electre Tri, une méthode pour affecter des options dans des catégories ordonnées basée sur une relation de surclassement (voir [5], pp. 389-401 or [3], pp. 381-385).

L'apprentissage de tels modèles (plus précisément, des profils définissant les catégories et des coalitions de critères suffisantes pour y être affectées) sur la base d'exemples de classement, peut être réalisée à l'aide de programmation mathématique, et certaines formulations MIP (Mixed Integer Programming) ont été proposées. Toutefois, la résolution s'avère difficile, et n'est pas envisageable pour des jeux de données issues de situations réelles (voir [4]). Dans ce cas, des approches heuristiques ont été proposées, mais dont l'optimalité ne peut plus être garantie (voir [6, 7]). Nous proposons une solution alternative, basée sur une reformulation comme un problème de satisfiabilité. Tout en garantissant l'optimalité, les résultats expérimentaux s'avèrent très prometteurs, même sur des instances de taille significative.

L'article est organisé de la manière suivante. En section 2, nous présentons les notions et concepts de base permettant d'appréhender le problème d'apprentissage d'un modèle de tri non-compensatoire. En section 3, nous présentons notre formulation SAT pour inférer un modèle NCS sur la base d'exemples d'apprentissage. Nous évaluons ensuite la pertinence et l'intérêt de cette formulation en Section 4. Nous concluons en mentionnant des perspectives intéressantes.

2 Positionnement du problème

Nous détaillons dans cette section les notions permettant de formuler le problème d'apprentissage des paramètres d'un modèle de tri non-compensatoire. En Section 2.1, nous formulons le modèle NCS et définissons ses paramètres. En Section 2.2, nous spécifions les entrées et sorties du problème d'apprentissage.

2.1 Classement non-compensatoire

Définition 1 (critères, profils, coalitions) *$\mathcal{N}$ désigne un ensemble fini de* citères*, chaque critère $i \in \mathcal{N}$ étant une fonction qui à une alternative x associe une valeur dans un ensemble ordonné $(\mathbb{X}_i, \leq_i)$, et la relation $\leq_i$ pouvant être interprétée comme "moins bon que". Les alternatives sont donc décrites par un $|\mathcal{N}|$-uplet de valeurs multi-critères appelé* profil*, et on note $\mathbb{X} = \prod_{i\in\mathcal{N}} \mathbb{X}_i$ l'ensemble de ces profils. Par analogie avec un système de vote où les critères seraient les votants, Une partie de $\mathcal{N}$ est appelée une* coalition de critères.

Dans une optique non-compensatoire, lorsque l'on est amené à comparer des alternatives, on s'intéresse à la nature des points de vue suivant lesquels l'une des alternatives peut apparaître comme étant la meilleure, sans se préoccuper de l'intensité de la préférence suivant l'un ou l'autre de ces points de vue. On définit ainsi la fonction

$$\begin{array}{rccc} O_{\mathcal{N}}: & \mathbb{X}\times\mathbb{X} & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathcal{N}) \\ & (x,y) & \mapsto & \{i \in \mathcal{N} : x_i \geq_i y_i\} \end{array}$$

Lorsque $O_{\mathcal{N}}(x,y) = \mathcal{N}$, l'alternative x est au moins aussi bonne que l'alternative y sur l'ensemble des critères : on dit que x *domine faiblement* y au sens de Pareto. La dominance faible définit un ordre partiel sur l'ensemble des alternatives. On peut étendre cette relation d'ordre en se fondant sur le principe "comparer, puis agréger" et en élargissant l'ensemble des coalitions de critères que l'on estime suffisantes pour juger qu'une alternative est meilleure.

Définition 2 (ensemble de coalitions suffisantes) *Un ensemble* convenable *de coalitions suffisantes de critères $\mathcal{T}$ est une partie de $\mathcal{P}(\mathcal{N})$ close supérieurement pour l'inclusion :*

$$\forall T \in \mathcal{T}, \forall S \in \mathcal{P}(\mathcal{N}), S \supseteq T \Rightarrow S \in \mathcal{T}$$

Un problème de tri ordinal consiste à affecter une alternative, décrite par un profil $x \in \mathbb{X}$, à une catégorie parmi un ensemble fini et ordonné $C_1 \prec \cdots \prec C_p$. Dans une approche inductive, fondée sur les principes, on s'attache à définir une *fonction de tri* entre les ensembles $\mathbb{X}$ et $C_1 \prec \cdots \prec C_p$, vérifiant certaines propriétés, telles que :

- *Pareto* : être croissante entre $\mathbb{X}$, ordonné par la dominance, et $C_1 \prec \cdots \prec C_p$;
- *non-compensation* : interdire qu'une "très bonne" valeur sur un critère ait davantage d'influence qu'une valeur "suffisante".

Le modèle de tri non compensatoire NCS fondé sur des profils proposé par [1, 2] vérifie ces deux propriétés.

Définition 3 (jeu de profils) *un jeu de profils convenable b est un (p-1)-uplet de profils frontières vérifiant la condition*

$$\forall k < k' \in [\![1, p-1]\!], \forall i \in \mathcal{N},\ b_i^k \leq_i b_i^{k'}$$

Par convention, un tel jeu sera complété par deux profils : b_0, représentant une alternative anti-idéale, dominée par toutes ; et b_p représentant une alternative idéale, qui domine toutes les autres.

Un jeu de profils convenable b définit une suite $(b^k)_{0\leq k\leq p}$ croissante dans l'ensemble des profils $\mathbb{X}$ ordonné par la dominance faible. Sur chaque critère $i \in \mathcal{N}$, la suite $(b_i^k)_{0\leq k\leq p}$ est croissante dans l'ensemble $\mathbb{X}_i$ ordonné par $\leq_i$, et permet de définir une suite d'intervalles emboîtés $\{x_i \in \mathbb{X}_i : x_i \geq_i b_i^k\}_{0\leq k\leq p}$ définissant les valeurs acceptables au niveau k pour le critère i.

Définition 4 (tri non-compensatoire NCS) *Soient un ensemble de critères $\mathcal{N}$, et un ensemble fini et totalement ordonné de catégories $C_1 \prec \cdots \prec C_p$. Pour tout couple $(b, \mathcal{T})$, où b désigne un jeu de profils convenable et $\mathcal{T}$ un ensemble convenable de coalitions suffisantes, la procédure de tri $NCS_{b,\mathcal{T}}$ associe à toute alternative décrite par le profil $x \in \mathbb{X}$ la catégorie C_k telle que $O_{\mathcal{N}}(x, b^k) \in \mathcal{T}$ et $O_{\mathcal{N}}(x, b^{k+1}) \notin \mathcal{T}$*

Remarque 1 *Les modèles de tri non-compensatoire $NCS_{b,\mathcal{T}}$ où l'ensemble des coalitions suffisantes contiendrait la coalition vide, ou ne contiendrait pas la coalition unanime, sont dégénérés car ils ne sont pas surjectifs sur l'ensemble des catégories $C_1 \prec \cdots \prec C_p$.*

Exemple 1 *Thierry est journaliste et prépare un comparatif de modèles automobiles pour un numéro spécial. Il considère un ensemble M de modèles populaires, qu'il souhaite ranger de manière à présenter un sous-ensemble de modèles "sélectionnés par la rédaction".*

Afin d'établir cette sélection, Thierry a décidé de ne retenir que 4 critères : le coût (mesuré en euros), l'accélération (mesurée par le temps en secondes pour passer de 0 à 100km.h^{-1}, de préférence le plus faible possible), le freinage et la tenue de route (mesurés sur des échelles qualitatives, de préférence les plus élevés possibles). L'ensemble $\mathbb{X}$ des 14 modèles est décrit par la table de performance donnée par la Table 1.

Thierry souhaite affecter à chaque modèle une catégorie parmi $C_\star$ (Sans intérêt) $\prec C_{\star\star}$ (Sélectionné) $\prec C_{\star\star\star}$ (Recommendé). Il emploie pour ce faire un modèle de tri

M	**coût**	**accélérat°**	**freinage**	**tenue de route**
m_1	16 973	29	2.66	2.5
m_2	18 342	30.7	2.33	3
m_3	15 335	30.2	2	2.5
m_4	18 971	28	2.33	2
m_5	17 537	28.3	2.33	2.75
m_6	15 131	29.7	1.66	1.75

TABLE 1 – Table de performance

M	**coût**	**accélérat°**	**freinage**	**tenue de route**
$\star\star\star$	$\leq$ 15 500	$\leq$ 28.8	$\geq$ 2.5	$\geq$ 2.6
$b^{\star\star}$	15 500	28.8	2.5	2.6
$\star\star$	$\leq$ 17 250	$\leq$ 30	$\geq$ 2.2	$\geq$ 1.9
$b^{\star}$	17 250	30	2.2	1.9
$\star$	> 17 250	> 30	< 2.2	< 1.9

TABLE 2 – Profils frontières et catégories par critère

non-compensatoire $NCS_{b,\mathcal{T}}$ dont les valeurs des profils sont données par la Table 2.

En prenant en considération ces seuils, Thierry obtient une nouvelle table de performance, où chaque critère est évalué sur l'échelle $\star \prec \star\star \prec \star\star\star$:

M	**coût**	**accélérat°**	**freinage**	**tenue de route**
m_1	$\star\star$	$\star\star$	$\star\star\star$	$\star\star$
m_2	$\star$	$\star$	$\star\star$	$\star\star\star$
m_3	$\star\star\star$	$\star$	$\star$	$\star\star$
m_4	$\star$	$\star\star\star$	$\star\star$	$\star\star$
m_5	$\star$	$\star\star\star$	$\star\star$	$\star\star\star$
m_6	$\star\star\star$	$\star\star$	$\star$	$\star$

TABLE 3 – Appréciation des performances

Ces appréciations sont ensuite agrégées en appliquant les règles suivantes :

- *une alternative est $\star\star$ ou $\star\star\star$ si elle est au moins $\star\star$ pour le coût ou l'accélération, et au moins $\star\star$ pour le freinage ou la tenue de route ;*
- *une alternative est $\star\star\star$ si elle est $\star\star\star$ pour le coût ou l'accélération, et $\star\star\star$ pour le freinage ou la tenue de route.*

Pour être jugé globalement $\star\star$, se révéler $\star\star\star$ sur un critère ne confère pas d'avantage particulier, ainsi qu'il sied à une procédure non-compensatoire. Les différentes coalitions de critères (qui forment un hypercube de dimension 4) sont représentées sur la figure 2.

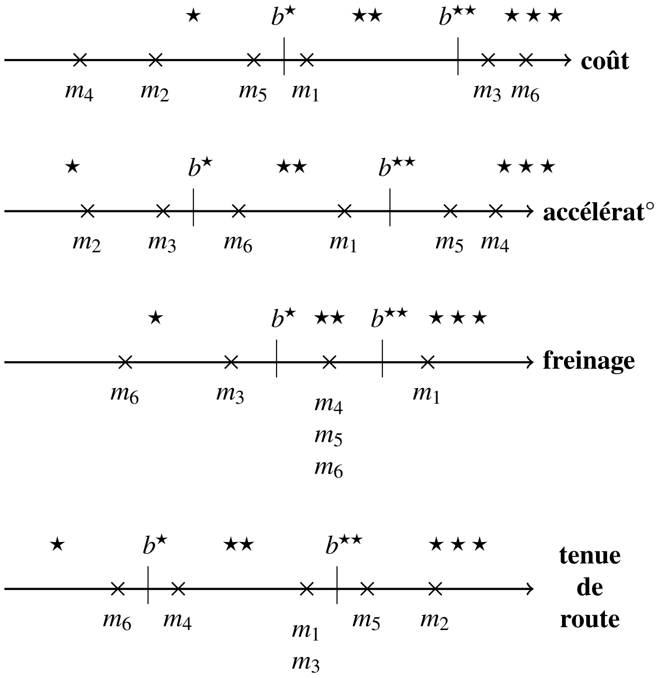

FIGURE 1 – Représentation des performances en fonction des limites des catégories

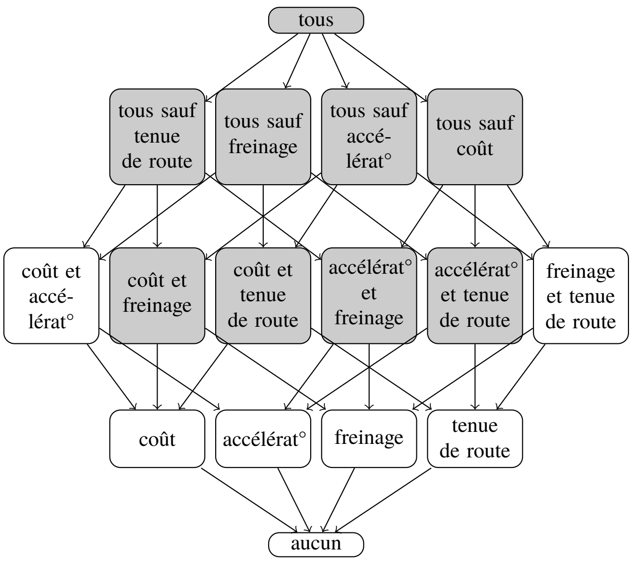

FIGURE 2 – Les coalitions de critères en gris sont *suffisantes*, les autres *insuffisantes*. Les flèches dénotent la force relative des coalitions qui diffèrent d'un seul critère, en pointant vers la plus faible.

Enfin, le modèle fournit le tri suivant :

véhicule	catégorie
m_1	⋆⋆
m_2	⋆
m_3	⋆⋆
m_4	⋆⋆
m_5	⋆⋆⋆
m_6	⋆

TABLE 4 – Catégories assignées par le modèle

2.2 Le paradigme de la désagregation

Dans une situation de décision donnée, en faisant l'hypothèse que les principes caractérisant le tri non-compensatoire structurent les préférences du décideur, on peut s'interroger sur la valeur des paramètres permettant de décrire au mieux le point de vue du décideur. Une option consiste à simplement lui demander de décrire du mieux qu'il peut les seuils séparant les catégories sur chacun des critères, et d'énumérer les coalitions suffisantes minimales. Afin d'obtenir ces informations de la manière rapide et fiable, autant que faire se peut, un analyste pourrait employer la stratégie fondée sur le modèle décrite dans [8]. Elle permet d'obtenir ces paramètres en se restreignant à ne demander que des informations preférentielles holisitques - est-ce qu'une alternative (fictive) peut être affectée une certaine catégorie ?- et de construire le questionnaire le plus court.

Nous optons pour une démarche plus indirecte, proche du paradigme de l'apprentissage machine, où un ensemble d'affectation de référence est donné, dont on suppose qu'il décrit le point de vue du décideur. L'objectif est de prolonger ces affectations avec un modèle non-compensatoire. Dans ce contexte, nous désignons par une affectation, une application A d'un sous ensemble *d'alternatives de références* $\mathbb{X}^\star \subset \mathbb{X}$ vers un ensemble ordonné de catégories $C_1 \prec \cdots \prec C_p$. En outre, nous faisons l'hypothèse que les préférences recueillies ne sont pas perturbées par un quelconque bruit. Ces alternatives de référence font apparaître des valeurs d'un intérêt particulier sur chaque critère $i \in \mathcal{N}$, $\mathbb{X}_i^\star := \bigcup_{x\in\mathbb{X}^\star} x_i$. Nous recherchons alors un jeu de paramètres $(b, \mathcal{T})$ convenable (conformément aux définitions 2 et 3), tel que le modèle $NCS_{b,\mathcal{T}}$ associe chaque alternative de référence $x \in \mathbb{X}^\star$ à la catégorie qui lui est assignée $A(x)$.

3 Une formulation SAT pour NCS

Un problème de satisfiabilité booléenne consiste en un ensemble de variables booléennes V et une proposition logique en ces variables $f : \{0,1\}^V \to \{0,1\}$. Une solution $v^\star$ est un antécédent de 1 par la proposition f. Un problème est dit *satisfiable* s'il admet au moins une solution, *insatisfiable* dans le cas contraire. Sans perte de généralité, on peut supposer que la proposition f est écrite sous forme normale conjonctive $f = \bigwedge_{c\in C} c$, où chaque *clause* $c \in C$ est elle-même une disjonction en les variables ou leur négation $\forall c \in C, c = \bigvee_{v\in c^+} v \vee \bigvee_{v\in c^-} \neg v$. Ainsi, une solution satisfait au moins une condition (positive ou négative) de chaque clause.

Les problèmes présentés ci-après font un usage immodéré de clauses où toutes les variables apparaissent négativement, sauf une : $a \vee \neg b_1 \vee \cdots \vee \neg b_n$, qui représente l'implication logique $(b_1 \wedge \cdots \wedge b_n) \Rightarrow a$.

Lemme 1 *Soit $A : \mathbb{X}^\star \to C_1 \prec \cdots \prec C_p$ une affectation prolongée par un modèle NCS paramétré par le jeu de profils b et un ensemble de coalitions suffisantes $\mathcal{T}$. Si $B \subseteq \mathcal{N}$ est une coalition de critère telle qu'il existe une alternative de référence $x \in \mathbb{X}^\star$ qui surpasse la frontière supérieure de sa catégorie $b^{A(x)+1}$ sur chacun des critères de B, alors cette coalition n'est pas suffisante.*

$$\forall B \subseteq \mathcal{N},\ [\exists x \in \mathbb{X}^\star\ :\ \forall i \in B,\ x_i \geq b_i^{A(x)+1}] \Rightarrow B \notin \mathcal{T}$$

Démonstration 1 *Soit A une affectation, $(b, \mathcal{T})$ un couple de paramètres convenable pour le tri non-compensatoire, B une coalition de critères et x une alternative satisfaisant la prémisse, et supposons que B soit suffisante (i.e. appartienne à $\mathcal{T}$). L'alternative x serait au moins aussi bonne que le profil $b^{A(x)+1}$ pour une coalition suffisante de critère, et serait donc affecté à une catégorie strictement meilleure que $A(x)$. En particulier, le modèle $NCS_{b,\mathcal{T}}$ ne prolongerait pas l'affectation A.*

Lemme 2 *Soit $A : \mathbb{X}^\star \to C_1 \prec \cdots \prec C_p$ une affectation prolongée par un modèle NCS paramétré par le jeu de profils b et un ensemble de coalitions suffisantes $\mathcal{T}$. Si $B \subseteq \mathcal{N}$ est une coalition de critère telle qu'il existe une alternative de référence $x \in \mathbb{X}^\star$ surpassée par la frontière inférieure de sa catégorie $b^{A(x)}$ sur chacun des critères de B, alors la coalition complémentaire $\mathcal{N} \setminus B$ est suffisante.*

$$\forall B \subseteq \mathcal{N},\ [\exists x \in \mathbb{X}^\star\ :\ \forall i \in B,\ x_i < b_i^{A(x)}] \Rightarrow (\mathcal{N} \setminus B) \in \mathcal{T}$$

Démonstration 2 *Soit A une affectation, $(b, \mathcal{T})$ un couple de paramètres convenable pour le tri non-compensatoire, B une coalition de critères et x une alternative satisfaisant la prémisse, et supposons que $\mathcal{N} \setminus B$ soit insuffisante (i.e. n'appartienne pas à $\mathcal{T}$). L'ensemble des critères pour lesquels l'alternative x serait au moins aussi bonne que le profil $b^{A(x)}$ est un sous-ensemble de $\mathcal{N} \setminus B$, et serait considéré insuffisant. Par conséquent, x se verrait affectée à une catégorie strictement moins bonne que $A(x)$ et, en particulier, le modèle $NCS_{b,\mathcal{T}}$ ne prolongerait pas l'affectation A.*

Définition 5 (formulation NCS-SAT) *Soient $\mathcal{N}$ un ensemble de critères, $C_1 \prec \cdots \prec C_p$ un ensemble ordonné de* *catégories, $\mathbb{X}^\star$ un ensemble d'alternatives de référence. À toute affectation $A : \mathbb{X}^\star \to C_1 \prec \cdots \prec C_p$ on associe un problème de satisfiabilité booléenne noté $NCS - SAT(A)$. Ce problème porte sur les deux familles de variables :*

— *y_B indicées par une coalition de critères $B \subseteq \mathcal{N}$;*

— *$z_{i,h,k}$ triplement indicées par un critère $i \in \mathcal{N}$, une frontière entre catégories $1 \leq h \leq p-1$ et une valeur $k \in \mathbb{X}_i^\star$ prise par une alternative de référence sur le critère i.*

Il est décrit sous forme normale conjonctive par la conjonction des 5 familles de clauses suivantes.

1. *Pour tout critère $i \in \mathcal{N}$, pour toute frontière entre catégories adjacentes $1 \leq h \leq p-1$, pour toute paires de valeurs ordonnées $k < k' \in \mathbb{X}_i^\star$:*

$$z_{i,h,k'} \vee \neg z_{i,h,k} \tag{1}$$

2. *Pour tout critère $i \in \mathcal{N}$, pour toute paire ordonnée de frontières $1 \leq h < h' \leq p-1$, for toute valeur $k \in \mathbb{X}_i^\star$:*

$$z_{i,h,k} \vee \neg z_{i,h',k} \tag{2}$$

3. *Pour toute paire ordonnée de coalitions $B \subset B' \subseteq \mathcal{N}$:*

$$z_{B'} \vee \neg z_B \tag{3}$$

4. *Pour toute coalition $B \subseteq \mathcal{N}$, pour toute frontière $1 \leq h \leq p-1$, pour toute alternative de référence immédiatement au-delà de cette frontière $x \in \mathbb{X}^\star$: $A(x) = C_{h+1}$:*

$$(\bigvee_{i \in B} z_{i,h,x_i}) \vee y_{\mathcal{N} \setminus B} \tag{4}$$

5. *Pour toute coalition $B \subseteq \mathcal{N}$, pour toute frontière $2 \leq h \leq p$, pour toute alternative de référence immédiatement en-deçà de cette frontière $x \in \mathbb{X}^\star$: $A(x) = C_h$:*

$$(\bigvee_{i \in B} \neg z_{i,h,x_i}) \vee \neg y_B \tag{5}$$

Théorème 1 *Soient une affectation $A : \mathbb{X}^\star \to C_1 \prec \cdots \prec C_p$ surjective, un ensemble de coalitions suffisantes $\mathcal{T}$ et un jeu de profils b convenables pour le tri non-compensatoire. Si le modèle $NCS_{b,\mathcal{T}}$ prolonge l'affectation A, alors le couple de multiplets à composantes booléennes :*

— *$y_B^\star$ indicé par une coalition de critères $B \subseteq \mathcal{N}$ et défini par $y_B = 1 \iff B \in \mathcal{T}$;*

— *$z_{i,h,k}^\star$ triplement indicé par un critère $i \in \mathcal{N}$, une frontière entre catégories $1 \leq h \leq p-1$ et une valeur $k \in \mathbb{X}_i^\star$ prise par une alternative de référence sur le critère i, et définie par $z_{i,h,k} = 1 \iff k \geq b_i^h$;*

forme une solution du problème de satisfiabilité booléenne $NCS - SAT(A)$.

Démonstration 3 *Si b définit un jeu de profils convenable pour le tri non-compensatoire, alors les clauses (1) sont vérifiées car si $k < k'$ et k est au-delà du seuil, il en va de même pour k'. Les clauses (2) requièrent que, si une valeur donnée se situe au delà d'un certain seuil $b_i^{h'}$, alors elle se situe aussi au-delà des seuils inférieurs b_i^h pour $h < h'$, ce qui traduit exactement la définition 3 des profils convenables pour le tri ordinal . Les clauses (3) requièrent que, si une coalition est considérée suffisante, alors il en va de même de toute coalition qui la contient, ce qui correspond à la définition 2 d'un ensemble de coalitions suffisantes convenable pour le tri ordinal. Si le modèle $NCS_{b,\mathcal{T}}$ prolonge l'affectation A, alors les clauses (5) sont vérifiées - sinon, d'après le lemme 1, une des alternatives de référence $u \in \mathbb{X}^\star$ affectée à la catégorie C_{h-1} surclasserait le profil b^h sur une coalition suffisante de critères. De même, les clauses (4) sont vérifiées, sinon, d'après le lemme 2, une alternative de référence $a \in \mathbb{X}^\star$ affectée à la catégorie C_h ne surclasserait pas le profil b^h, puisque l'ensemble des critères sur lesquels a est au moins aussi bon que b^h serait inclus dans une coalition insuffisante.*

Théorème 2 *Soit une affectation $A : \mathbb{X}^\star \to C_1 \prec \cdots \prec C_p$ surjective. Si le couple de multiplets à composantes booléennes :*

— *$y_B^\star$ indicé par une coalition de critères $B \subseteq \mathcal{N}$*

— *$z_{i,h,k}^\star$ triplement indicé par un critère $i \in \mathcal{N}$, une frontière entre catégories $1 \leq h \leq p-1$ et une valeur $k \in \mathbb{X}_i^\star$ prise par une alternative de référence sur le critère i,*

forme une solution du problème de satisfiabilité booléenne $NCS - SAT(A)$, alors tout jeu de profils b tel que, pour tout critère $i \in \mathcal{N}$ et pour toute frontière $1 \leq h \leq p-1$, pour toute valeur $k \in \mathbb{X}_i^\star$ $z_{i,h,k}^\star = 0 \Rightarrow k <_i b_i^h$ et $z_{i,h,k}^\star = 1 \Rightarrow k \geq_i b_i^h$ et l'ensemble de coalitions de critères $\mathcal{T} := \{B \subseteq \mathcal{N} : y_B^\star = 1\}$ constituent un couple de paramètres convenables pour le tri non-compensatoire et définissent un modèle $NCS_{b,\mathcal{T}}$ qui prolonge l'affectation A.

Démonstration 4 *En supposant qu'il en existe, soient $y^\star, z^\star$ un couple de multiplets solution du problème $NCS - SAT(A)$, et $b, \mathcal{T}$ un jeu de profils et un ensemble de coalitions répondant aux conditions du théorème 2.*

Les clauses(2) et (3) garantissent que le jeu de profils b et l'ensemble de coalitions suffisantes $\mathcal{T}$ conviennent pour le tri non compensatoire.

Afin de montrer que le modèle $NCS_{b,\mathcal{T}}$ prolonge l'affectation A, il reste à prouver que dans ce modèle, toute alternative de référence surclasse le profil décrivant la limite inférieure de la catégorie à laquelle est affectée sur une coalition suffisante de critères, mais pas celui décrivant la limite supérieure. Soit $x \in \mathbb{X}^\star$ une telle alternative de référence.

— *Concernant la limite inférieure : si $A(x) = C_1$, il n'y a rien à démontrer ; sinon, on considère l'ensemble*

$B := \mathcal{N} \setminus O_{\mathcal{N}}(x, b^{A(x)-1})$ qui, par construction, est exactement l'ensemble $\{i \in \mathcal{N} : z^{\star}_{i,A(x)-1,x_i} = 0\}$. Pour la coalition B, la frontière indicée par $(A(x)-1)$ et l'alternative de référence x, la clause (4) s'écrit $(\bigvee_{i \in B} z^{\star}_{i,h,x_i}) \vee y^{\star}_{\mathcal{N}\setminus B} = 1$. Le premier terme étant nul, on en déduit que $y^{\star}_{\mathcal{N}\setminus B} = 1$, i.e. $O_{\mathcal{N}}(x, b^{A(x)}) \in \mathcal{T}$.

— *Concernant la limite supérieure : si $A(x) = C_p$, il n'y a rien à démontrer ; sinon, pour toute coalition $B \in \mathcal{T}$ (B n'est pas vide car A est surjective), la clause (5) concernant la coalition B, la frontière indicée par $A(x)$ et l'alternative de référence x impose $(\bigvee_{i \in B} \neg z^{\star}_{i,h,x_i}) \vee \neg y^{\star}_B = 1$, avec $y^{\star}_B = 1$, donc l'une au moins des valeurs booléennes $(z^{\star}_{i,h,x_i})_{i \in B}$ est nulle, et pour ce critère $i_0 \in B$ la valeur x_{i_0} est strictement inférieure au seuil $b^h_{i_0}$, ce qui assure que x ne surpasse pas b^h sur la totalité des critères de la coalition B.*

3.1 Discussion

Nous proposons de décrire et d'expliquer les différentes clauses présentées dans le Théorème 1 :

1. *Échelles ascendantes*- si $k < k' \in \mathbb{X}^{\star}_i$ et k est au dessus d'un certain seuil b^h_i, alors k' aussi. Il est nécessaire et suffisant de considérer les clauses où k et k' sont des valeurs consécutives de $\mathbb{X}^{\star}_i$.
2. *Une hiérarchie de profils* - si $1 \leq h < h' \leq p-1$ et $k \in \mathbb{X}^{\star}_i$ est au dessus du seuil $b^{h'}_i$, alors il est également au dessus de b^h_i. Il est nécessaire et suffisant de considérer les clauses où $h' = h+1$.
3. *Force des coalitions* - si une coalition $B \subseteq \mathcal{N}$ est suffisante, alors toute coalition $B' \supseteq B$ contenant B est aussi suffisante. Il est nécessaire et suffisant de considérer les clauses où la coalition B' contient exactement un critère de plus que B, correspondant aux arêtes représentées sur la figure 1.
4. *Les alternatives sont surclassées par la limite supérieure de leur classe* - fondée sur le lemme 1, cette règle permet d'inférer les coalitions insuffisantes correspondant aux points forts de l'alternative.
5. *Les alternatives surclassent la limite inférieure de leur classe* - fondée sur le lemme 2, cette règle permet d'inférer les coalitions suffisantes complémentaires aux points faibles de l'alternative.

4 Implémentation et mise en œuvre

Dans cette section, nous étudions la performance intrinsèque de la formulation proposée dans la section 3. Nous avons implémenté l'algorithme 1, en utilisant un solveur SAT, afin de résoudre les instances du problème d'apprentissage d'un modèle NCS étant donné l'affectation d'un ensemble d'alternatives de référence. Dans ce qui suit, nous commençons par décrire notre protocole expérimental, en précisant quelques détails techniques sur l'implémentation. Nous exposons ensuite les résultats de l'étude expérimentale concernant le temps de calcul de notre programme, en considérant l'influence de la taille de l'ensemble d'apprentissage, le nombre de critères et le nombre de catégories.

Algorithm 1: SAT-BASED NCS DISAGGREGATION

Data: an assignment $A : \mathbb{X}^{\star} \to C_1 \prec \cdots \prec C_p$
Result: correct NCS profiles $b \in (\prod_{i \in \mathcal{N}} \mathbb{X}^{\star}_i)^{p-1}$ and a correct NCS set of sufficient coalitions $\mathcal{T} \in \mathcal{P}(\mathcal{N})$ such that the NCS model with parameters b and $\mathcal{T}$ extends the assignment A, or None if there is no such model.

```
Formulate the SAT problem with variables and clauses
  described in Theorem 2
Solve it
if If the problem is unsat then
    return None
else
    compute b and T as detailed in Theorem 2 and
      return them
```

4.1 Protocole expérimental et détails d'implémentation

L'algorithme que nous testons prend en entrée l'affectation d'un ensemble d'alternatives $\mathbb{X}^{\star}$, où chaque alternative est décrite par un vecteur de performances sur l'ensemble des critères $\mathcal{N}$, dans un ensemble de catégories $C_1 \prec \cdots \prec C_p$. Au cœur de cet algorithme, nous résolvons un problème de satisfiablité booléenne connu pour être NP-complet mais ayant reçu une grande attention en termes d'outils de résolution performants. Si nous ne pouvons pas nous attendre à ce que ces solveurs fonctionnent rapidement dans le pire des cas - à moins que $P = NP$ - leur performance doit être mesurée dans la pratique, en résolvant des instances du problème.

Génération du jeu de données.

Dans le cadre de ce travail, nous considérons comme données d'entrée pour l'algorithme des jeux de données générés aléatoirement et sans bruit (consistants). D'une part, l'algorithme que nous proposons n'est pas encore équipé pour prendre en charge des données bruitées, ce qui ne nous permet pas de l'alimenter avec des données décrivant des préférences réellement observées (de tel jeux de données sont utilisés afin d'évaluer les performances des dispositifs d'apprentissage automatique des préférences). D'autre part, l'utilisation de données d'entrée complètement aléatoires et non structurées n'a pas de sens dans le contexte de la décision algorithmique. Afin d'assurer que les données préférentielles que nous utilisons font sens, nous mettons en œuvre un modèle de décision pour les générer, et en particulier un modèle compatible avec l'hypothèse non compensatoire que nous postulons. Plus précisément, nous utilisons un modèle MR Sort pour la génération de l'ensemble d'apprentissage, un modèle qui fait l'hypothèse additionnelle que les coalitions suffisantes ont une structure additive, i.e. chaque critère $i \in \mathcal{N}$ à un pouvoir de vote $w_i \in]0, +\infty[$, et une coalition $B \subseteq \mathcal{N}$ est considérée suffisante si et seulement si son pouvoir global de vote $\sum_{i \in B} w_i$ dépasse un certain seuil de majorité qualifiée $\lambda \in]0, +\infty[$.

Lors de la génération d'un jeu de données, les paramètres considérés sont : le nombre de critères $|\mathcal{N}|$, le nombre de catégories p, et le nombre d'alternatives $|\mathbb{X}^\star|$. Nous considérons que tous les critères sont continus dans l'intervalle $[0, 1]$, qui est computationnellement plus contraignant pour notre algorithme que le cas où un critère est mesuré sur une échelle comportant un ensemble fini de valeurs.

Pour l'ensemble des critères, nous générons un ensemble de profils ascendants en échantillonnant uniformément $p-1$ nombres dans l'intervalle $[0, 1]$ et en les triant par ordre croissant. Nous générons les poids en échantillonnant $|\mathcal{N}| - 1$ nombres dans l'intervalle $[0, 1]$, en les triant, et en les utilisant comme la somme cumulée des poids. λ est aléatoirement choisi avec une probabilité uniforme dans l'intervalle $]0.5, 1[$. Finalement, nous échantillonnons uniformément $|\mathbb{X}^\star|$ $|\mathcal{N}|$-uplets dans l'intervalle $[0, 1]^\mathcal{N}$, définissant la table de performance des alternatives de référence, et nous les affectons dans des catégories $C_1 \prec \cdots \prec C_p$ selon le modèle MR Sort $\mathcal{M}^0$ avec les paramètres générés, à savoir : les profils, les poids et le seuil de majorité.

Résolution du problème SAT.

Une fois les données générées, nous traduisons, suivant l'algorithme 1, l'affectation en un problème binaire de satisfaction décrit par un ensemble de variables et de clauses, comme décrit par la définition 5. Ce problème de satisfaction binaire est écrit dans un fichier au format DIMACS et passé en ligne de commande au solveur SAT - CryptoMiniSat 5.0.1 - gagnant de la compétition SAT 2016 et publié sous la licence MIT. Si le solveur trouve une solution, alors elle est convertie en paramètres pour le modèle NCS, tel que décrit par le théorème 2. Le modèle NCS $\mathcal{M}^c$ fourni par le programme est alors validé avec les données d'entrée - est ce que le modèle prolonge l'affectation donnée ?

Conformément au théorème 2, nous nous attendons à ce que le solveur parvienne toujours à identifier une solution, puisque le modèle MR Sort $\mathcal{M}^0$ permettant de générer l'affectation fournit une instance particulière de modèle NCS prolongeant l'affectation.

Évaluation de la capacité du modèle inféré à restaurer le modèle original.

Dans le but d'apprécier la "proximité" entre le modèle calculé $\mathcal{M}^c$ et celui à partir duquel les exemples d'affectation ont été générés $\mathcal{M}^0$, nous avons procédé comme suit : nous avons échantillonné un large ensemble de n profils de performances dans $\mathbb{X} = [0, 1]^\mathcal{N}$ et nous avons calculé l'affectation de ces performances selon le modèle original $\mathcal{M}^0$ et le modèle $\mathcal{M}^c$ retourné par l'algorithme 1. Sur cette base, nous avons calculé $err - rate$, la proportion d'"erreurs", *i.e.* les profils qui ne sont pas affectés à la même catégorie par les deux modèles. Pour obtenir un échantillon raisonnable pour $\mathbb{X}$, nous avons fait varié la taille de l'échantillon de $\mathbb{X} = [0, 1]^\mathcal{N}$ selon le nombre de critères $|\mathcal{N}|$: $n = Max(Min(4^{|\mathcal{N}|}, 3.10^5), 10^4))$.

4.2 Résultats

Nous avons exécuté le protocole d'expérimentation, décrit précédemment, en faisant varier les différentes valeurs des paramètres gouvernant la taille du problème à résoudre. Nous avons fixé les valeurs suivantes :

— le nombre de critères $|\mathcal{N}| = 5, 7, 9, 11$;

— le nombre de catégories $p = 2, 3$;

— le nombre d'alternatives $|\mathbb{X}^\star| = 25, 50, 100, 200, 400$.

Pour chaque valeur du triplet des paramètres, nos avons échantillonné 100 modèles MR Sort, et enregistré le temps de calcul (t) et le taux d'erreur ($err-rate$) sur un ordinateur portable avec le système d'exploitation Windows 7 (64 bit) et embarquant un processeur Intel Core i7-4600 cadencé à 2.1 GHz et 8 GB de RAM.

Résultats en termes de temps de calcul.

Les premiers résultats concernent le temps de calcul. Ce temps varie entre le dixième de seconde et environ une centaine de secondes, couvrant ainsi trois ordres de grandeur. Les figures 3 et 4 décrivent l'évolution du temps de calcul (représentées en utilisant une échelle logarithmique) en fonction de la taille de l'ensemble d'apprentissage (échelle logarithmique) et le nombre de critères (échelle proportionnelle), respectivement.

D'emblée, la figure 3 et la table 5 indiquent que nous sommes environ 100 fois plus rapide que l'implémentation faisant appel à une formulation en programmation linéaire mixte (MIP), décrite dans [4]. Par exemple, si nous considérons 11 critères, 3 catégories, et 100 alternatives de référence, l'exécution de l'algorithme 1 demande en moyenne 10 secondes, tandis que ce même budget temporel ne permet de traiter des problèmes avec 4 critères, 2 catégories et 20 alternatives de référence par MIP, d'après [4]. En outre, nous soulignons que le temps de calcul dans notre cas inclut à la fois la formulation du problème SAT et sa résolution (voir Algorithme 1)

Reference alternatives	#crit	11		9		7		5		5 (MIP, [4])	
	#categ.	3	2	3	2	3	2	3	2	3	2
25		2.10^{0}	2.10^{0}	6.10^{-1}	4.10^{-1}	2.10^{-1}	1.10^{-1}	7.10^{-2}	5.10^{-2}	2.10^{0}	5.10^{-1}
50		5.10^{0}	4.10^{0}	1.10^{0}	9.10^{-1}	3.10^{-1}	2.10^{-1}	1.10^{-1}	7.10^{-2}	8.10^{0}	2.10^{0}
100		1.10^{1}	7.10^{0}	2.10^{0}	6.10^{-1}	4.10^{-1}	4.10^{-1}	1.10^{-1}	1.10^{-1}	2.10^{1}	4.10^{1}
200		2.10^{1}	1.10^{1}	5.10^{0}	4.10^{0}	1.10^{0}	8.10^{-1}	3.10^{-1}	2.10^{-1}	–	–
400		4.10^{1}	3.10^{1}	1.10^{1}	7.10^{0}	2.10^{0}	2.10^{0}	6.10^{-1}	4.10^{-1}	–	–

Table 5 – Temps de calcul (secondes)

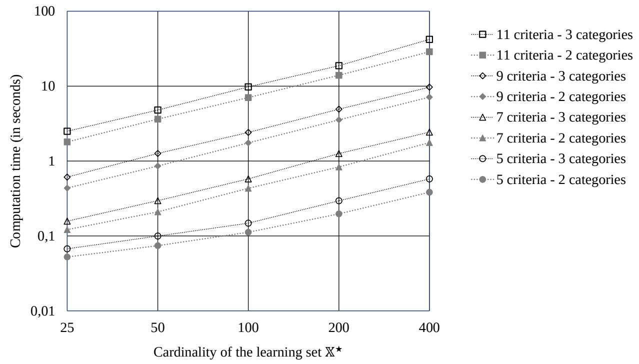

Figure 3 – Temps de calcul en fonction de la taille de l'ensemble d'apprentissage

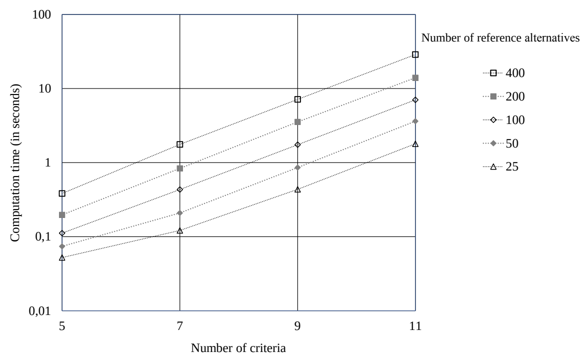

Figure 4 – Temps de calcul en fonction du nombre de critères

Ensuite, l'allure des différentes représentations graphiques semble indiquer une dépendance affine entre, d'une part, $\log t$ et $\log |\mathbb{X}^\star|$, et, d'autre part $\log t$ et $\log |\mathcal{N}|$. Plus précisément, les coefficients permettant un ajustement affine semblent compatibles avec une loi

$$t \; \alpha \; |\mathbb{X}^\star| \times 2^{|\mathcal{N}|},$$

où le temps de calcul est proportionnel au nombre d'alternatives de référence et au nombre de coalitions de critères (ce qui correspond à l'ordre de grandeur du nombre de clauses dans le problème NCS-SAT).

En guise de synthèse, nous proposons une formulation pratique permettant de prévoir le temps de calcul nécessaire pour résoudre une quelconque instance : compter 10 secondes pour 11 critères, 3 catégories et 100 alternatives de référence ; puis doubler pour chaque critère supplémentaire, ou lorsque le nombre d'exemples d'apprentissage double.

Résultats sur la capacité du modèle inféré à restaurer le modèle original.

Les tables 7 (pour 2 catégories) et 6 (pour 3 catégories) indiquent le taux d'erreur en fonction du nombre de critères et la taille de l'ensemble d'apprentissage. Ces résultats sont résumés dans les figures 5 et 6. Sans surprise, les résultats obéissent aux principes selon lesquels un modèle avec un plus grand degré de liberté est plus difficile à déterminer - ainsi les taux d'erreur augmentent avec le nombre de critères ou le nombre de catégories. Inversement, la taille de l'ensemble d'alternatives de références, où l'on s'assure que les modèles $\mathcal{M}^0$ et $\mathcal{M}^c$ coïncident, représente l'effort fourni - en termes de collecte d'information - pour aligner les deux modèles. En toute logique, on observe que le taux d'erreur diminue avec la taille de l'ensemble d'apprentissage.

Reference alternatives	5 crit.	7 crit.	9 crit.	11 crit.	5 (MIP, [4])
25	17%	20%	25%	25%	22%
50	10%	15%	20%	21%	15%
100	5%	8%	12%	18%	7%
200	2%	4%	8%	12%	–
400	1%	2%	4%	6%	–

Table 6 – Taux d'erreur – 3 catégories

La comparaison entre la première et la dernière colonne des tables 7 ou 6 révèle que la performance de l'algorithme 1, basé sur la formulation SAT qui sélectionne aléatoirement un modèle NCS parmi l'ensemble des modèles compatibles, n'est pas mauvaise et plutôt similaire à la performance de l'implémentation MIP proposée par [4], qui sélectionne le

MR Sort compatible en optimisant une certaine fonction d'erreur.

Reference alternatives	5 crit.	7 crit.	9 crit.	11 crit.	5 (MIP, [4])
25	10%	11%	13%	11%	12%
50	5%	9%	10%	11%	6%
100	3%	5%	9%	10%	3%
200	2%	3%	5%	6%	–
400	1%	2%	3%	5%	–

TABLE 7 – Taux d'erreur –2 catégories

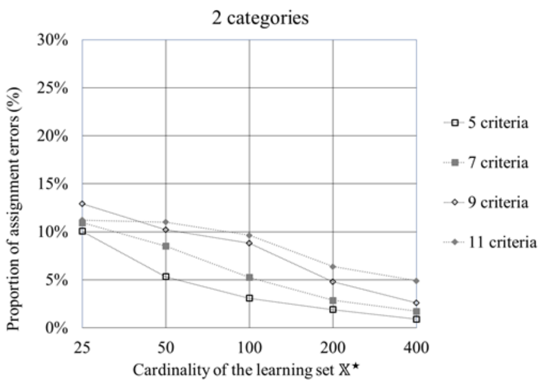

FIGURE 5 – Erreurs d'affectation en fonction de la taille de l'ensemble d'apprentissage – 2 catégories

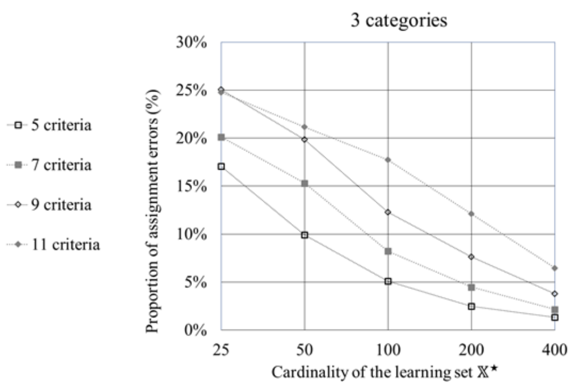

FIGURE 6 – Erreurs d'affectation en fonction de la taille de l'ensemble d'apprentissage–3 catégories

5 Conclusion et perspectives

Dans ce papier, nous avons considéré le modèle de tri multicritère non-compensatoire [1, 2], et nous avons proposé une nouvelle formulation comme un problème de satisfiabilité, permettant d'inférer ce modèle à partir d'un ensemble d'apprentissage fourni par un décideur. La question de l'apprentissage de ce modèle a déjà été abordée dans la littérature et résolue par diverses solutions, en particulier la programmation mathématique en variables mixtes [4], ainsi qu'une heuristique spécifique [6, 7]. En raison du temps de calcul élevé, la formulation exacte ne peut être appliquée qu'a des ensembles d'apprentissage de taille limitée. Les heuristiques quant à elles peuvent traiter de larges ensembles de données, mais ne garantissent pas de trouver le modèle compatible avec l'ensemble d'apprentissage. Notre nouvel algorithme fournit une telle garantie. Nous avons implémenté et testé notre formulation, celle-ci surpasse les approches exactes en termes de temps de calcul (réduction du temps de calcul par un facteur 100).

Par ailleurs, cette bonne performance en termes de calcul aurait pu être contrebalancée par des capacités limitées du modèle inféré dans le cadre de la généralisation. En effet, l'approche MIP se préoccupe de trouver le modèle le plus représentatif parmi l'ensemble des modèles compatibles (à travers l'utilisation d'une fonction objectif), tandis que notre approche SAT renvoie le premier modèle compatible trouvé. Nos expérimentations ont montré que les approches MIP et SAT ont des performances similaires en termes de généralisation. De ce fait, nous croyons que cet algorithme apporte une forte valeur ajoutée aux techniques d'apprentissage des modèles de tri non-compensatoire basées sur des ensembles d'apprentissage, et particulièrement lorsque ces ensembles sont de grande taille.

Notre travail laisse des questions ouvertes et offre également de nouvelles perspectives. Premièrement, l'algorithme proposé est bien adapté pour être intégré dans un processus interactif. Ce dernier permettra au décideur d'éliciter interactivement le modèle de tri non-compensatoire sur la base d'un ensemble d'apprentissage qui est défini de manière incrémentale (voire d'autres informations préférentielles). L'exploration de l'ensemble des modèles possibles (ALL-SAT) mérite d'être étudiée. Deuxièmement, ce travail considère que l'ensemble d'apprentissage est consistant (sans bruit), et une extension pour inclure l'inconsistance peut être envisagée. L'étude d'une formulation MAX-SAT pourrait être intéressante dans ce cadre. Enfin, il serait pertinent de considérer une telle formulation dans la problématique de construction d'explications pour des recommandations répondant à des problèmes de tri multi-critères.

Références

[1] D. Bouyssou and T. Marchant. An axiomatic approach to noncompensatory sorting methods in MCDM, I : The case of two categories. European Journal of Operational Research, 178(1) :217—245, 2007.

[2] D. Bouyssou and T. Marchant. An axiomatic approach to noncompensatory sorting methods in MCDM, II : More than two categories. European Journal of Operational Research, 178(1) :246-–276, 2007.

[3] D. Bouyssou, T. Marchant, M. Pirlot, A. Tsoukiàs, and Ph. Vincke. Evaluation and decision models with multiple criteria : Stepping stones for the analyst. International Series in Operations Research and Management Science, Volume 86. Springer, Boston, 1st edition, 2006.

[4] A. Leroy, V. Mousseau, and M. Pirlot. Learning the parameters of a multiple criteria sorting method. In R. Brafman, F. Roberts, and A. Tsoukiás, editors, Algorithmic Decision Theory, volume 6992 of Lecture Notes in Artificial Intelligence, pages 219—233. Springer, 2011.

[5] B. Roy and D. Bouyssou. Aide multicritère à la décision : méthodes et cas. Economica, Paris, 1993.

[6] O. Sobrie, V. Mousseau, and M. Pirlot. Learning a majority rule model from large sets of assignment examples. In P. Perny, M. Pirlot, and A. Tsoukiàs, editors, Algorithmic Decision Theory, pages 336-–350, Brussels, Belgium, 2013. Springer.

[7] O. Sobrie, V. Mousseau and M. Pirlot.Learning the Parameters of a Non Compensatory Sorting Model. In Algorithmic Decision Theory, ADT 2015, pages 153–170, 2015.

[8] K. Belahcène, V. Mousseau, M. Pirlot and O. Sobrie. Preference Elicitation and Learning in a Multiple Criteria Decision Aid perspective. Research report 2017-02, LGI CentraleSupélec, http ://www.lgi.ecp.fr/Biblio/PDF/CR-LGI-2017-02.pdf, 2017.