Sur la contraction itérée

Sébastien Konieczny[1] **Ramon Pino Pérez**[2]
[1] CRIL, CNRS - Université d'Artois - France
[2] Facultad de Ciencias - Universidad de los Andes - Venezuela
konieczny@cril.fr pino@ula.ve

Résumé

Dans cet article nous nous intéressons aux opérateurs de contraction itérée, afin de fournir une caractérisation comarable à celle obtenue par Darwiche et Pearl pour la révision itérée. Nous proposons des postulats pour la contraction itérée, et donnons un théorème de représentation pour ces opérateurs. Nos résultats permettent de mettre en lumière les liens entre révision itérée et contraction itérée. Nous montrons en particulier que les operateurs de révision itérée forment une classe plus large que les opérateurs de contraction itérée. Une conséquence importante de cela est que, dans le cadre des états épistémiques, les identités de Levi et de Harper ne sont pas aussi puissantes que dans le cadre AGM classique, et le lien entre révision itérée et contraction itérée est différent que celui que l'on obtient dans le cadre AGM.

Abstract

In this paper we study iterated contraction in the epistemic state framework, offering a counterpart of the work of Darwiche and Pearl for iterated revision. We provide pure syntactical postulates for iterated contraction, that is, the postulates are expressed only in terms of the contraction operator. We establish a representation theorem for these operators. Our results allow to highlight the relationships between iterated contraction and iterated revision. In particular we show that iterated revision operators form a larger class than that of iterated contraction operators. As a consequence of this, we have that, in the epistemic state framework, the Levi identity has limitations; namely, it doesn't allow to define all iterated revision operators.

1 Introduction

La théorie du changement de croyances [1, 8, 11, 12, 9, 7] a pour objet la modelisation de l'évolution des croyances logiques d'un agent lorsque celui-ci reçoit de nouvelles informations.

Les deux principales classes d'opérateurs de changements sont les opérateurs de révision, qui permettent de corriger des croyances fausses d'un agent, et les opérateurs de contraction, qui permettent de retirer certaines informations des croyances de l'agent.

Contraction et révision, bien qu'étant des opérations différentes, sont étroitement liées. Deux identités permettent de définir la contraction à partir de la révision et vice-versa.

Il est possible de définir un opérateur de révision à partir d'un opérateur de contraction grâce à l'identité de Levy, qui dit que pour définir une révision par la formule α il est possible de d'abord effectuer une contraction par $\neg\alpha$, suivie d'une expansion [1] par α [15, 16].

Réciproquement, il est possible de définitir la contraction à partir d'un opérateur de révision en utilisant l'identité de Harper : ce qui est vrai après une contraction par α est ce qui est vrai dans l'état de croyances courrant et dans celui qui est le résultat de la révision par $\neg\alpha$ [10] (donc, intuitivement, ce qui est vrai indépendemmant du fait que α soit vrai).

Afin de donner une définition formelle à ces identités, définissons K comme une théorie (en ensemble déductivement clos de formules logiques) et prenons une formule α. On note $\star$ un opérateur de révision, $\div$ un opérateur de contraction, et $\oplus$ un opérateur d'expansion

Identité de Levi	$K \star \alpha = (K \div \neg\alpha) \oplus \alpha$
Identité de Harper	$K \div \alpha = K \cap (K \star \neg\alpha)$

La connection obtenu avec ces identités est très forte, puisque l'on obtient en fait une bijection entre l'ensemble des opérateurs de révision et l'ensemble des opérateurs de contraction [8]. Donc, dans le cadre AGM, ces deux classes d'opérateurs sont les deux faces d'une même pièce de monnaie, et on peut donc choisir d'étudier soit la révision, soit la contraction, suivant l'opération que l'on considère être la plus naturelle ou élémentaire.

Bien que cette théorie du changement est intrinsèquement un processus dynamique, les travaux initiaux ne s'in-

1. Voir [8] pour une définition exacte, mais il est possible d'identifier l'expansion avec la conjonction (ou l'union) dans la plupart des cas.

téressent qu'au cas (statique) d'une seule étape de changement [1, 8, 11], et ne permettent pas de capturer le changement itéré de manière convaincante.

Après de nombreuses tentatives infructueuses, la solution pour la modélisation de la révision itérée a été proposée par Darwiche et Pearl dans [6]. Ils ont proposé des postulats supplémentaires pour la révision itérée. Ces contraintes additionnelles pour l'itération ne peuvent pas se satisfaire de la représentation usuelle (théories) pour les croyances de l'agent, utilisée dans le cadre AGM classique. Il est nécessaire d'utiliser une représentation plus expressive, les états épistémiques (*epistemic states*), qui permettent d'encoder également la stratégie de révision de l'agent, et qui permettent d'assurer la cohérence de la dynamique du changement.

Il est intéressant de noter que le travail de Darwiche et Pearl a été consacré à la révision itérée. On pourrait expérer que la caractérisation de la contraction itérée pourrait être obtenue directement à partir de généralisation des identités. Mais, malheureusement, ce n'est pas le cas. Tout d'abord, jusqu'ici, il n'y a eu aucune proposition de postulats, ni de théorème de représentation pour la contraction itérée. Il y a eu quelques travaux sur la contraction itérée, que nous discuterons à la section sur les travaux connexes, mais il n'y a eu aucune contrepartie du travail de Darwiche et Pearl pour la contraction. C'est ce que nous proposons dans cet article.

La classe des opérateurs de contraction itérée obtenue est très intéressantes à différents titres. Cela permet d'obtenir une meilleure comporéhension de la théorie du changement de croyances. En fait, certaines des conséquences de notre théorème de représentation sont assez surprenantes.

Tout d'abord, lorsque l'on compare les deux théorèmes de représentation (celui pour la contraction itérée et celui pour la révision itérée), il est clair qu'ils utilisent la même classe d'assignements (fidèles). Cela signifie que la différence entre les les opérateurs de contraction itérée et de révision itérée n'est pas une question de nature, mais une question de degré (la révision étant un changement plus important que la contraction, mais pas un autre type de changement).

La conséquence la plus importante et la plus surprenante est que nous montrons qu'il y a plus d'opérateurs de révision itérée que d'opérateurs de contaction itérée, contrairement à la bijection obtenue dans le cadre AGM classique.

Et une conséquence de cela est qu'il ne faut pas espérer obtenir des généralisations de l'indentité de Levi dans le cas itéré : certains opérateurs de révision itérée ne peuvent être obtenus à partir d'opérateurs de contraction itérée.

Cela semble donc suggérer que les opérateurs de révision itérée sont plus élémentaires que les opérateurs de contraction itérée.

Dans la section suivante nous donnons les préliminaires formels nécessaires pour cet article. Dans la section 3 on donne les postulats logiques pour modéliser la contraction itérée. Dans la section 4 nous donnons un théorème de représentation pour ces opérateurs de contraction itérée. Dans la section 5 nous étudions les liens entre opérateurs de contraction itérée et de révision itérée. Enfin, dans la section 6 nous discutons des travaux connexes, avant de conclure section 7.

2 Préliminaires

On considère un langage propositionnel $\mathcal{L}$, défini à partir d'un alphabet fini de variables propositionnelles $\mathcal{P}$ et les connecteurs standards. On notera $\mathcal{L}^*$ l'ensemble des formules cohérentes de $\mathcal{L}$.

Une interprétation ω est une fonction totale de $\mathcal{P}$ dans $\{0, 1\}$. L'ensemble de toutes les interprétations est noté $\mathcal{W}$. Une interprétation ω est un modèle d'une formule $\phi \in \mathcal{L}$ si et seulement si elle la rend vrai (sous l'interprétation usuelle des connecteurs).

On notera $[\![\alpha]\!]$ l'ensemble des modèles d'une formule α, i.e., $[\![\alpha]\!] = \{\omega \in \mathcal{W} \mid \omega \models \alpha\}$.

Si $\leq$ est un pré-ordre sur $\mathcal{W}$ (i.e., une relation réflexive et transitive), alors $<$ dénote l'ordre strict associé et défini par $\omega < \omega'$ si et seulement si $\omega \leq \omega'$ et $\omega' \not\leq \omega$. Un pré-order est *total* si $\forall \omega, \omega' \in \mathcal{W}$, $\omega \leq \omega'$ ou $\omega' \leq \omega$. Si $A \subseteq \mathcal{W}$, alors l'ensemble des éléments minimaux de A pour un pré-ordre total $\leq$, noté $\min(A, \leq)$, est défini par $\min(A, \leq) = \{\omega \in A \mid \nexists \omega' \in A \text{ tel que } \omega' < \omega\}$. Et $\min(\leq)$ représente l'ensemble $\min(\mathcal{W}, \leq)$.

Nous utiliserons les états épistémiques pour représenter les croyances de l'agent, comme usuellement pour la révision itérée [6]. Un état épistémique Ψ représente les croyances actuelles de l'agent, mais également des informations conditionnelles additionnelles, qui guident le processus de révision (habituellement représentées par un préordre sur les interprétations, un ensemble de conditionnels, une séquence de formules, etc.). Nous noterons $\mathcal{E}$ l'ensemble de tous les états épistémiques. La fonction de projection $B : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{L}^*$ associe à chaque état épistémique Ψ une formule cohérente $B(\Psi)$, qui représente les croyances courantes de l'agent dans l'état épistémique Ψ. On appellera modèles de l'état épistémiques les modèles de ses croyances, i.e. $[\![\Psi]\!] = [\![B(\Psi)]\!]$.

Un représentation concrète très utile des états épistémiques est celle utilisant des pré-ordres sur les interprétations. Avec cette représentation, si $\Psi = \leq$, alors $B(\Psi)$ est une formule propositionnelle telle que $[\![B(\Psi)]\!] = \min(\leq)$. On appellera cette représentation concrète d'états épistémiques, la *représentation canonique*.

Pour éviter des détails techniques inutiles, on ne considérera dans cet article que des états épistémiques cohérents et des nouvelles informations cohérentes.

Donc, nous nous intéressons à des fonctions $\circ$ qui associent à un état épistémique et une formule cohérente, un nouvel état épistémique, $\circ : \mathcal{E} \times \mathcal{L}^* \longrightarrow \mathcal{E}$. L'image d'une paire (Ψ, α) sous $\circ$ sera noté $\Psi \circ \alpha$.

3 Contraction Itérée

Donnons tous d'abord les postulats basiques pour la contraction d'états épistémiques. Nous utilisons les postulates de contraction proposés pour la contraction en logique propositionnelle dans [4], qui sont équivalents aux postulats AGM originaux [1]. Nous les adaptons simplement pour les états épistémiques :

(C1) $B(\Psi) \vdash B(\Psi \div \alpha)$
(C2) Si $B(\Psi) \nvdash \alpha$, alors $B(\Psi \div \alpha) \vdash B(\Psi)$
(C3) Si $B(\Psi \div \alpha) \vdash \alpha$, alors $\vdash \alpha$
(C4) $B(\Psi \div \alpha) \wedge \alpha \vdash B(\Psi)$
(C5) Si $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ alors $B(\Psi \div \alpha_1) \equiv B(\Psi \div \alpha_2)$
(C6) $B(\Psi \div (\alpha \wedge \beta)) \vdash B(\Psi \div \alpha) \vee (B(\Psi \div \beta)$
(C7) Si $B(\Psi \div (\alpha \wedge \beta)) \nvdash \alpha$, alors $B(\Psi \div \alpha) \vdash B(\Psi \div (\alpha \wedge \beta))$

(C1) impose que la contraction ne peut que retirer de l'information, donc les croyances de l'état épistémique résultat sont plus faibles que celles de l'état courrant. (C2) dit que si l'état épistémique courrant n'implique déjà pas la formule par laquelle on contracte, alors l'état épistémique résultat aura exactement les mêmes croyances que l'état courrant. (C3) est le postulat de succès, il exprime le fait que le seul cas où la contraction échoue à retirer une formule des croyances de l'agent est celui où cette formule est une tautologie. (C4) est le postulat de restauration, il dit que si on effectue une contraction par une formule, suivie par la conjonction par cette formule, on doit retrouver les croyances initiales. Cela assure qu'aucune information n'a inutilement été rejetée lors de la contraction. (C5) est le postulat d'indépendance de la syntaxe, il exprime le fait que la syntaxe des formules n'a pas d'impact sur le résultat de la contraction. (C6) dit que la contraction par une conjonction implique la disjonction des contractions des éléments de cette conjonction. (C7) dit que, si α n'est pas retirée lors d'une contraction par la conjonction $\alpha \wedge \beta$, alors la contraction par α implique la contraction par la conjonction.

Maintenant nous pouvons donner les postulats pour l'itération :

(C8) Si $\neg\alpha \vdash \gamma$ alors $B(\Psi \div (\alpha \vee \beta)) \vdash B(\Psi \div \alpha) \Leftrightarrow$
$B(\Psi \div \gamma \div (\alpha \vee \beta)) \vdash B(\Psi \div \gamma \div \alpha)$
(C9) Si $\gamma \vdash \alpha$ alors $B(\Psi \div (\alpha \vee \beta)) \vdash B(\Psi \div \alpha) \Leftrightarrow$
$B(\Psi \div \gamma \div (\alpha \vee \beta)) \vdash B(\Psi \div \gamma \div \alpha)$
(C10) Si $\neg\beta \vdash \gamma$ alors
$B(\Psi \div \gamma \div (\alpha \vee \beta)) \vdash B(\Psi \div \gamma \div \alpha) \Rightarrow$
$B(\Psi \div (\alpha \vee \beta)) \vdash B(\Psi \div \alpha)$
(C11) Si $\gamma \vdash \beta$ alors
$B(\Psi \div \gamma \div (\alpha \vee \beta)) \vdash B(\Psi \div \gamma \div \alpha) \Rightarrow$
$B(\Psi \div (\alpha \vee \beta)) \vdash B(\Psi \div \alpha)$

(C8) exprime le fait que si une contraction par une disjonction implique la contraction par un des éléments de la disjonction, alors ce sera également le cas si on commence par une contraction par une formule qui est conséquence de cette négation. (C9) capture le fait que si une contraction par une disjonction implique la contraction par un des éléments de cette disjonction, alors ce sera également le cas si on commence par une contraction par une formule qui implique cet élément. (C10) exprime le fait que si une contraction par une disjonction implique la contraction par un des élements de cette disjonction après la contraction par une formule qui est une consequence de la négation de l'autre élément de la disjonction, alors c'était déjà le cas avant cette contraction. (C11) capture le fait que si une contraction par une disjonction implique la contraction par un des éléments de cette disjonction après la contraction par une formule qui implique l'autre élément de la disjonction, alors c'était déjà le cas avant cette contraction.

Les opérateurs qui satisfont (C1)-(C7) seront appelés opérateurs de contractions. Et les opérateurs satisfaisant (C1)-(C11) seront appelés opérateurs de contraction itérée.

4 Théorème de Représentation

Nous allons à présent donner un théorème de représentation pour les opérateurs de contraction itérée en termes d'assignments fidèles. Ces assignements associent à chaque état épistémique un pré-ordre total sur les interprétations. Ce pré-ordre représente la plausibilité relative des différentes interprétations, et les croyances actuelles de l'agent sont définies par les interprétations les plus plausibles.

Commençons par rappler la définition des assignements fidèles [6] :

Définition 1 *Un assignement fidèle est une fonction qui associe à chaque état épistémique Ψ un pré-ordre total $\leq_\Psi$ sur les interprétations tel que :*

1. *Si $\omega \models B(\Psi)$ et $\omega' \models B(\Psi)$, alors $\omega \simeq_\Psi \omega'$*
2. *Si $\omega \models B(\Psi)$ et $\omega' \not\models B(\Psi)$, alors $\omega <_\Psi \omega'$*
3. *Si $\Psi_1 = \Psi_2$, alors $\leq_{\Psi_1} = \leq_{\Psi_2}$*

Nous pouvons à présent donner le théorème basique pour les opérateurs de contraction dans le cadre des états épistémiques :

Théorème 1 *Un operateur $\div$ satisfait les postulats **(C1) - (C7)** si et seulement si il existe un assignement fidèle qui associe à chaque état épistémique Ψ un pré-ordre total $\leq_\Psi$ sur les interprétations tel que*

$$[[\Psi \div \alpha]] = [[\Psi]] \cup \min([[\neg\alpha]], \leq_\Psi)$$

On dira que l'assignement fidèle donné par le théorème ci-dessus *représente* l'opérateur $\div$. La preuve de ce théorème est similaire à celle pour le théorème de représentation dans le cas de la logique propositionelle [4], nous ne la recopions donc pas ici et le lecteur pourra se référer à cet article.

La partie la plus importante ici est celle concernant l'itération.

Définition 2 *Un assignement fidèle itéré est un assignement fidèle qui satisfait également les conditions suivantes :*

4. *Si* $\omega, \omega' \in [[\gamma]]$, *alors* $\omega \leq_\Psi \omega' \Leftrightarrow \omega \leq_{\Psi \div \gamma} \omega'$
5. *Si* $\omega, \omega' \in [[\neg\gamma]]$, *alors* $\omega \leq_\Psi \omega' \Leftrightarrow \omega \leq_{\Psi \div \gamma} \omega'$
6. *Si* $\omega \in [[\neg\gamma]]$ *et* $\omega' \in [[\gamma]]$, *alors* $\omega <_\Psi \omega' \Rightarrow \omega <_{\Psi \div \gamma} \omega'$
7. *Si* $\omega \in [[\neg\gamma]]$ *et* $\omega' \in [[\gamma]]$, *alors* $\omega \leq_\Psi \omega' \Rightarrow \omega \leq_{\Psi \div \gamma} \omega'$

La condition 4 capture le fait que la plausibilité entre les modèles de γ sont exactement les mêmes avant et après la contraction par γ. Similairement, la condition 5 capture le fait que la plausibilité entre les modèles de la négation de γ sont exactement les mêmes avant et après la contraction par γ. On appelera les conditions 4 et 5, conditions de rigidité. La condition 6 capture le fait que si un modèle de $\neg\gamma$ est strictement plus plausible qu'un modèle de γ avant la contraction par γ, alors il le sera toujours après la contraction par γ. La condition 7 assure que la plausibilité des modèles de $\neg\gamma$ ne s'empirera pas par rapport aux modèles de γ après la contraction par γ.

Il est important de remarquer que les assignements fidèles itérés sont directement liés à ceux de la révision itérée [6], il y a juste une inversion dans les conditions 6 et 7, qui est due au fait que l'on doit considérer une contraction par $\neg\alpha$ comme un changement (un *improvement* [14]) plus restreint qu'une révision par α (voir la discussion au début de la section 6).

Nous pouvons à présent donner le théorème de représentation pour la contraction itérée.

Théorème 2 *Un opérateur* $\div$ *est un opérateur de contraction itérée, i.e. il satisfait les postulats* ***(C1) - (C11)****, si et seulement si il existe un assignement fidèle itéré qui associe à chaque état épistémique* Ψ *un pré-ordre total* $\leq_\Psi$ *sur les interprétations tel que*

$$[[\Psi \div \alpha]] = [[\Psi]] \cup \min([[\neg\alpha]], \leq_\Psi)$$

5 Contraction itérée versus révision itérée

Nous vondrions à présent étudier les liens entre contraction itérée et révision itérée.

Une tentation naturelle serait de tenter de généraliser les identités de Levu et de Harper dans le cas itéré. En fait quelques travaux ont tenté de suivre cette voix [18, 5, 2].

Nous allons tout d'abord expliquer en quoi ce n'est pas si simple. Et nous allons également montrer qu'il y a de vrai problèmes si on tente de définir une connexion formelle. Plus exactement, nous allons montrer que dans le cas itéré révision et contraction ne sont plus les deux faces d'une même pièce de monnaie (i.e. deux classes d'opérateurs liées par une bijection), mais qu'ils doivent plutôt être vus comme deux instances d'une même classes d'opérateurs de changement (les opérateurs d'*improvement* [14]), et que la différence est seulement une question de degré de changement.

5.1 Identités dans le cas général

Commençons par rappeler les identités de Levy et de Harper :

Identité de Levy	$\Psi \star \alpha = (\Psi \div \neg\alpha) \oplus \alpha$
Identité de Harper	$\Psi \div \alpha = \Psi \sqcap (\Psi \star \neg\alpha)$

Et voyons donc à présent les problèmes de l'utilisation de ces identités pour la contraction et la révision itérée dans le cadre des états épistémiques. Tout d'abord, dans le cadre AGM, ces deux identités sont définitionnelles, c'est-à-dire qu'en utilisant l'identité de Levi, par exemple, il est possible d'obtenir l'opérateur de révision $\star$ qui défini la théorie $\Psi \star \alpha$ à partir de la partie droite de l'identité en utilisant un opérateur de contraction et l'opérateur d'expansion. Mais dans le cadre général, les états épsitémiques sont des objets abstraits, que l'on ne peut caractériser au niveau logique qu'à partir de la fonction de projection B. Donc dans ce cadre général, on ne connait pas exactement $\Psi \div \neg\alpha$, et donc on ne peut pas utiliser cela pour définir ce qu'est $\Psi \star \alpha$. Donc utiliser cette identité pour définir un opérateur est compliqué. La seule possibilité semble être de se restreindre à une représentation particulière des états épistémiques (comme les pré-ordres sur les interprétations par exemple), mais ces résultats ne vaudront alors que pour cette représentation, et pas dans le cas général.

Deuxième problème, alors que $\oplus$ et $\sqcap$ ont un sens clair dans le cadre AGM, il faut trouver des définitions adéquates à ces opérations dans le cadre des états épistémiques. Ce seul problème est déjà loin d'être aisé. Par exemple l'étude des différentes définitions possible de $\sqcap$ est le but principal de [2].

Une possibilité serait de restreindre ces identités aux croyances associées à chaque état épistémique :

Equivalence de Levi	$B(\Psi \star \alpha) \equiv B(\Psi \div \neg\alpha) \oplus \alpha$
Equivalence de Harper	$B(\Psi \div \alpha) \equiv B(\Psi) \vee B(\Psi \star \neg\alpha)$

Mais ce qui signigie que nous n'avons plus des identités, ces équivalences ne permettant plus de définir ces opérateurs. Il est donc nécessaire de partir de deux opérateurs $\star$

et $\div$, et de vérifier si ils sont liées par ces équivalences.

5.2 Identités sous la représentation canonique

Donc, pour tenter d'aller plus loin, nous devons nous focaliser sur une représentation particulière des états épistémiques. La représentation canonique, utilisant des pré-ordres totaux, peut-être utilisée pour définir totalement l'état épistémique après la contraction (ou la révision). Supposons donc que l'on dispose d'un assignement fidèle itéré $\Psi \mapsto \leq_\Psi$ (Définition 2). On identifie Ψ avec $\leq_\Psi$, et donc, par le théorème 2, l'opérateur défini par $\Psi \div \gamma = \leq_{\Psi \div \gamma}$ est un opérateur de contraction itérée. Dans ce cas on dit que l'opérateur $\div$ est donné par l'assignement. On peut procéder de la même manière pour définir un opérateur de révision itéré [6], l'opérateur défini à partir de l'assignement itéré (pour la révision [6]) par $\Psi \star \alpha = \leq_{\Psi \star \alpha}$ est un opérateur de révision itérée.

On peut alors définir des identités sur les pré-ordres totaux associés aux états épistémiques par les opérateurs (tpo signifiant pré-ordres totaux) :

Identité de Levy tpo $\quad \leq_{\Psi \star \alpha} = \leq_{\Psi \div \neg\alpha} \oplus \alpha$

Identité de Harper tpo $\quad \leq_{\Psi \div \alpha} = \leq_\Psi \sqcap \leq_{\Psi \star \neg\alpha}$

Donc maintenant il est possible de définir ces pré-ordres à partir des identités et de vérifier que les opérateurs ainsi obtenus satisfont les propriétés attendues. Le seul problème restant est alors de définir les opérateurs $\oplus$ et $\sqcap$ dans ce cadre.

Pour $\oplus$ nous allons montrer qu'utiliser l'opérateur de révision naturelle de Boutilier $\star_N$ [3] est une bonne solution.

Commençons par rappeler la définition de cet opérateur sur les pré-ordres totaux. Cela revient à trouver les modèles de la nouvelle information les plus plausibles, et d'en faire les interprétations les plus plausibles, alors que rien d'autre ne change dans le pré-ordre : Soit $\leq_\Psi$ le pré-ordre associé à l'état épistémique Ψ par l'assignement fidèle, et soit une nouvelle information α, on définit alors $\leq_{\Psi \star_N \alpha}$ (on utilisera également la notation $\leq_\Psi \star_N \alpha$) par :

— Si $\omega \models \min([\![\alpha]\!], \leq_\Psi)$ et $\omega' \not\models \min([\![\alpha]\!], \leq_\Psi)$, alors $\omega <_{\Psi \star_N \alpha} \omega'$

— Dans tous les autres cas $\omega \leq_{\Psi \star_N \alpha} \omega'$ ssi $\omega \leq_\Psi \omega'$

On peut alors montrer que l'idendité de Levi tpo fonctionne pour le cas itéré :

Proposition 1 *Soit un opérateur de contraction itérée $\div$ donné par son assignement $\Psi \mapsto \leq_\Psi$. Alors l'assignement défini par $\leq_{\Psi \star \alpha} = \leq_{\Psi \div \neg\alpha} \star_N \alpha$ satisfait les propriétés (CR1-CR4) [6], et peut donc être utilisé pour définir un opérateur de révision itérée Darwiche et Pearl (avec cette représentation canonique).*

Cette proposition implique en particulier qu'à chaque opérateur de contraction correspond un opérateur de révision. Cela signifie donc que la cardinalité de la classe des opérateurs de révision itérée obtenus à partir de l'identité de Levi tpo est au plus la cardinalité de la classe des opérateurs de révision itérée. Notons également que cette observation ne dépend pas de l'interprétation de l'opérateur $\oplus$ utilisé.

L'exemple suivant illustre cette utilisation concrète de l'identité de Levi tpo.

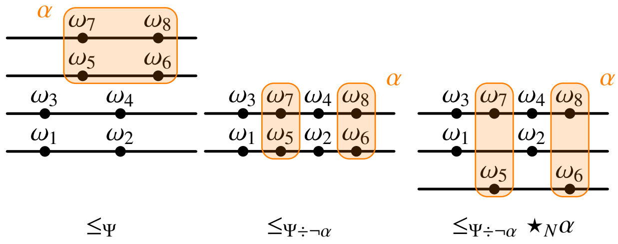

FIGURE 1 – De la contraction à la révision

Exemple 1 *Considérons le pré-ordre total $\leq_\Psi$ représenté figure 1. Dans cette figure plus une interprétation apparaît à un niveau bas, plus elle est plausible. Par exemple dans $\leq_\Psi$ on constate que $\omega_1 <_\Psi \omega_3$. Une contraction itérée par $\neg\alpha$ est un changement qui augmente (improve) la plausibilité des modèles de α, avec la condition que les modèles les plus plausides de α dans $\leq_\Psi$ rejoignent (i.e. deviennent aussi plausibles que) les modèles les plus plausibles de $\leq_\Psi$. La relation entre les modèles de α ne peut pas changer après la contraction, ainsi que la relation entre les modèles de $\neg\alpha$. A partir de celà, pour définir une révision, il suffit de prendre ces modèles les plus plausilbe de α et de les rendre les plus plausibles (en utilisant l'opérateur de révision naturelle de Boutilier [3]).*

Le processus inverse, c'est à dire la définition des opérateurs de contraction itérée à partir d'opérateurs de révision itérée en utilisant l'identité de Harper tpo, réclame quand à lui, de trouver une définition correcte pour $\sqcap$. Ce problème est le sujet de [2], où il est montré qu'il n'y a pas une unique façon canonique de procéder.

On peut voir cela comme une richesse additionnelle offerte par le cadre itéré. Néanmoins cette liberté supplémentaire a un prix. Et en fait, dans le cadre itéré, il y a plus d'opérateurs de révision que d'opérateurs de contraction. L'exemple suivant illustre ce fait.

Exemple 2 *Soient $\leq_\Psi$ et α comme illustrés figure 2. A cause des conditions de rigidité pour la contraction itérée, il n'y a que trois résultats possibles pour la contraction de $\leq_\Psi$ par $\neg\alpha$. Mais il y a cinq résultats possibles pour la révision. Trois de ces résultats peuvent être obtenus à partir de la contraction suivie de la révision naturelle, comme pour l'exemple précédent. Les deux derniers résultats possibles sont illustrés sur la figure.*

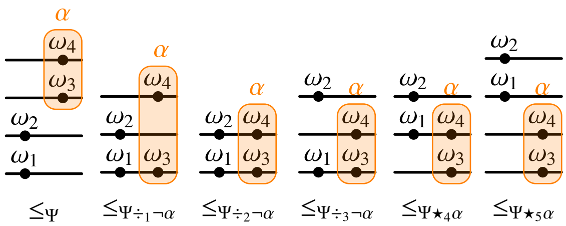

FIGURE 2 – Toutes les contractions possibles par $\neg\alpha$ et les revisions possibles par α à partir de $\leq_\Psi$

Observation 1 *Il y a plus d'opérateurs de révision que d'opérateurs de contraction. En particulier cela implique qu'il est impossible d'obtenir une interprétation de l'expansion $\oplus$ dans l'identité de Levi tpo permettant d'obtenir tous les opérateurs de révision itérée via cette identité.*

Cette remarque est importante car elle met en lumière une distinction importante avec le cadre AGM classique, où il y a une bijection entre opérateurs de contraction et opérateurs de révision. La contraction est souvent considéré comme un opérateur plus élémentaire que la révision puisque la révision peut être définie comme une contraction suivie par une expansion (conjonction). Dans le cadre itéré, il y a plus d'opérateurs de révision que d'opérateurs de contraction, donc les opérateurs les plus élémentaires semblent être les opérateurs de révision.

Dans des travaux précédents nous avons proposé une classe d'opérateurs de changement plus générale, les opérateurs d'amélioration (improvement) [14, 13], dont on peut avoir comme sous-classes les opérateurs de révision itérée, ainsi que ceux de contraction itérée. Nous revenons plus en détail sur ce point dans la section suivante.

6 Travaux connexes

Dans [14, 13] les opérateurs d'amélioration (improvement) sont définis comme une classe générale d'opérateurs de changement itéré, qui contiennent les opérateurs de révision itérée de Darwiche et Pearl comme cas particulier. Une classe plus générale, des opérateurs de *basic improvement* a également été introduite dans [17]. Les postulats caractérisant ces opérateurs induisent qu'au moins une partie de la nouvelle information est améliorée, et que la nouvelle information n'est pas dégradée (cela correspond aux postulats C3, C4 et DP).

Les opérateurs d'améliorations sont définis sémantiquement sur les assignements fidèles comme une augmentation de la plausibilité des modèles de la nouvelles information. Cette augmentation de plausibilité peut être plus ou moins restreinte, menant à différentes familles d'opérateurs [13]. Mais clairement l'augmentation de plausibilité pour les opérateurs de contraction est limités à cause du fait que les modèles les plus plausibles de la nouvelle information ne peuvent pas devenir (strcitement) plus plausibles que les modèles des croyances précédentes de l'agent. Alors que pour la révision, il n'y a pas de telle frontière, et donc on dispose de plus de liberté pour le changement.

La proposition suivante illustre le fait que les opérateurs de contraction itérée sont également des opérateurs d'amélioration faible (*weak improvement operators*) (par la négation de la formule).

Proposition 2 *Soit un opérateur de contraction itérée $\div$, alors l'opérateur $\dot{\div}$ défini par $\Psi\dot{\div}\alpha = \Psi \div \neg\alpha$ est un weak improvement operator [14]. C'est également un basic improvement operator.*

Cette proposition, avec la remarque que les opérateurs de révision itérée sont également des opérateurs de *basic improvement*, permettent d'illustrer le fait que ces opérateurs appartiennent à une même famille d'opérateurs de changement, que les opérateurs de contraction sont principalement différenciés des opérateurs de révision par la limite imposée au degré de changement, et que les opérateurs d'amélioration (*improvement*) sont bien la classe la plus primitive d'opérateurs de changement de croyances itérée.

Dans [5] les auteurs proposent également des postulats pour la contraction itérée, mais ils utilisent des opérateurs de révision itérés dans leurs postulats, donc les opérateurs ainsi définis ne le sont pas indépendemment, puisqu'ils apparaissent plutôt comme un produit des opérateurs de révision. Plus exactement, leur point de départ est un couple d'opérateurs $*$ et $\div$ qui satisfont les équivalences de Levi et de Harper. Ils charactérisent ensuite les quatre propriétés sémantiques de l'itération de la définition 2 en termes de postulats syntaxiques, mixant les opérateurs $*$ et $\div$. Dans notre travail nous proposons une caractérisation directe des opérateurs de contraction itérée (qui ne dépendent d'aucun opérateur de révision itérée).

[2] étudie le problème de la définition d'opérateurs de contraction itérée, à partir de l'identité de Harper, dans le cas concret d'une représentation utilisant des pré-ordres sur les interprétations. Ce travail montre la non-trivialité de cette question, et l'étendue des possibiltiés pour la définition de $\sqcap$. Dans cet article nous expliquons cette difficulté par le fait qu'il y a plus d'opérateurs de révision itérée que d'opérateurs de contraction itérée, ce qui implique que différents opérateurs de révision correspondent, à travers de l'identité de Harper, au même opérateur de contraction.

Enfin le travail détaillé dans [19] est également intéressant. Il concerne la caractérisation de trois opérateurs de contraction itérée dans le cadre de la représentation canonique des états épistémiques. Ils donnent des caractérisation syntaxique de ces trois opérateurs, mais ils ne proposent pas de théorème de représentation pour la classe générale des opérateurs de contraction itérée.

7 Conclusion

En conclusion, cet article propose la première caractérisation logique directe de la classe des opérateurs de contraction itérée, et propose un théorème de représentation en terme de pré-ordres totaux sur les interprétations. Nous discutons le fait qu'il n'y a pas de généralisation directe des identité de Levi et de Harper dans le cas itéré, mais surtout, qu'il est vain d'aller à la quête de ce genre d'identités dans le cadre itéré, pour deux raisons. Tout d'abord, contrairement au cadre AGM classique, ces deux classes d'opérateurs ne sont pas liées par une bijection. Il y a plus d'opérateurs de révision itérée que d'opérateurs de contraction itérée. Et enfin, ces deux familles d'opérateurs ne sont pas des opérations différentes, mais deux cas particuliers d'une famille plus générale, les opérateurs d' *improvement*. Et la différence entre ces deux familles n'est donc pas une différence de nature, mais une différence de degré du changement attendu.

Références

[1] Alchourrón, C. E., P. Gärdenfors et D. Makinson: *On the logic of theory change : Partial meet contraction and revision functions*. Journal of Symbolic Logic, 50 :510–530, 1985.

[2] Booth, Richard et Jake Chandler: *Extending the Harper Identity to Iterated Belief Change*. Dans Kambhampati, Subbarao (rédacteur) : *Proceedings of the Twenty-Fifth International Joint Conference on Artificial Intelligence, IJCAI 2016, New York, NY, USA, 9-15 July 2016*, pages 987–993. IJCAI/AAAI Press, 2016, ISBN 978-1-57735-770-4.

[3] Boutilier, C.: *Iterated Revision and Minimal Change of Conditional Beliefs*. Journal of Philosophical Logic, 25(3) :262–305, 1996.

[4] Caridroit, T., S. Konieczny et P. Marquis: *Contraction in Propositional Logic*. Dans *Thirteenth European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning with Uncertainty (ECSQARU'15)*, pages 186–196, 2015.

[5] Chopra, Samir, Aditya Ghose, Thomas Andreas Meyer et Ka-Shu Wong: *Iterated Belief Change and the Recovery Axiom*. J. Philosophical Logic, 37(5) :501–520, 2008.

[6] Darwiche, A. et J. Pearl: *On the logic of iterated belief revision*. Artificial Intelligence, 89 :1–29, 1997.

[7] Fermé, E. et S. O. Hansson: *AGM 25 Years*. Journal of Philosophical Logic, 40(2) :295–331, 2011.

[8] Gärdenfors, P.: *Knowledge in flux*. MIT Press, 1988.

[9] Hansson, S. O.: *A Textbook of Belief Dynamics. Theory Change and Database Updating*. Kluwer, 1999.

[10] Harper, William L.: *Rational conceptual change*. Dans *PSA : Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*, pages 462–494, 1976.

[11] Katsuno, H. et A. O. Mendelzon: *Propositional knowledge base revision and minimal change*. Artificial Intelligence, 52 :263–294, 1991.

[12] Katsuno, H. et A. O. Mendelzon: *On the Difference Between Updating a Knowledge Base and Revising It*. Dans *Belief Revision*, pages 183–203. Cambridge University Press, 1992.

[13] Konieczny, S., M. Medina Grespan et R. Pino Pérez: *Taxonomy of improvement operators and the problem of minimal change*. Dans *Proceedings of the Twelfth International Conference on Principles of Knowledge Representation And Reasoning (KR 2010).*, pages 161–170, 2010.

[14] Konieczny, S. et R. Pino Pérez: *Improvement operators*. Dans *Proceedings of the Eleventh International Conference on Principles of Knowledge Representation And Reasoning (KR 2008).*, pages 177–187, 2008.

[15] Levi, Isaac: *Decisions and revisions*. Cambridge University Press, 1984.

[16] Levi, Isaac: *For the sake of the argument*. Cambridge University Press, 1996.

[17] Medina Grespan, Mattia et Ramón Pino Pérez: *Representation of basic improvement operators*. Dans *Trends in Belief Revision and Argumentation Dynamics*, pages 195–227. College Publications, 2013.

[18] Nayak, Abhaya C., Randy Goebel, Mehmet A. Orgun et Tam Pham: *Taking Levi Identity Seriously : A Plea for Iterated Belief Contraction*. Dans Lang, Jérôme, Fangzhen Lin et Ju Wang (rédacteurs) : *Knowledge Science, Engineering and Management, First International Conference, KSEM 2006, Guilin, China, August 5-8, 2006, Proceedings*, tome 4092 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 305–317. Springer, 2006, ISBN 3-540-37033-1.

[19] Ramachandran, Raghav, Abhaya C. Nayak et Mehmet A. Orgun: *Three Approaches to Iterated Belief Contraction*. J. Philosophical Logic, 41(1) :115–142, 2012.