Allocation d'objets par des échanges le long d'un réseau social

Laurent Gourvès[1] **Julien Lesca**[1] **Anaëlle Wilczynski**[1]

[1] Univ. Paris-Dauphine, PSL Research University, CNRS, LAMSADE, Paris, France
`{laurent.gourves,julien.lesca,anaelle.wilczynski}@dauphine.fr`

Résumé

Cet article s'intéresse à un problème particulier d'allocation de ressources où chaque agent reçoit un unique objet. Initialement dotés d'un objet, les agents peuvent effectuer des échanges afin d'obtenir un objet qui leur plaît mieux. Seulement, tous les échanges ne sont pas plausibles en raison de l'incapacité de certains agents à communiquer entre eux. En considérant un réseau social sur les agents, on propose d'étudier les allocations possibles obtenues par des séquences d'échanges entre paires de voisins dans le réseau. Ce modèle soulève des questions naturelles concernant (*i*) la possibilité pour une allocation complète d'être atteignable par une séquence d'échanges dans le réseau, (*ii*) la possibilité pour un agent d'obtenir un objet donné, et (*iii*) la recherche d'allocations Pareto-efficaces. On se concentre sur la complexité de ces questions en déterminant, selon la structure du réseau social, des cas polynomiaux ou NP-complets.

Abstract

This article deals with the allocation of objects where each agent receives a single item. Starting from an initial endowment, the agents can be better off by exchanging their objects. However, not all trades are likely because some participants are unable to communicate. By considering that the agents are embedded in a social network, we propose to study the possible allocations emerging from a sequence of simple swaps between pairs of neighbors in the network. This model raises natural questions regarding (*i*) the reachability of a given full allocation, (*ii*) the ability of an agent to obtain a given object, and (*iii*) the search of Pareto-efficient allocations. We investigate the complexity of these problems by providing, according to the structure of the social network, polynomial and NP-complete cases.

1 Introduction

L'allocation de ressources indivisibles apparaît comme une problématique fondamentale en IA [9], se situant à l'interface entre l'informatique et l'économie. Lorsque l'ensemble des solutions est restreint à celles où chaque agent reçoit une ressource unique, le problème correspond à un cas spécifique de couplage [22, 21], que l'on peut appeler unilatéral (*one-sided matching*), car seulement un des deux groupes a des préférences sur le second. Les couplages unilatéraux ont été largement étudiés selon différentes approches, notamment par le biais du problème d'affectation [18], ou du *house allocation problem* [1]. Quand, de plus, chaque agent est initialement doté d'une ressource, le problème est connu dans la littérature sous le nom de *housing market problem* [24]. Une approche standard afin de réallouer les ressources consiste à effectuer des séquences d'échanges entre agents à partir de l'allocation initiale. L'algorithme *top-trading cycle* et ses variantes [24, 2, 7] exploitent cette idée dans le but d'obtenir une meilleure allocation du point de vue des agents. Une autre façon d'appréhender le problème réside dans le fait de laisser les agents effectuer eux-mêmes des échanges. Une riche littérature s'est développée autour de cette perspective distribuée, formalisant des conditions de réalisme pour un échange et analysant la qualité des issues possibles [23, 15, 11, 17, 12, 14, 10, 6]. La plus grande part de cette littérature est dévouée au problème général d'allocation de ressources où les agents peuvent recevoir plusieurs ressources, mais seulement très peu s'intéressent spécifiquement au problème du marché du logement [13].

Dans le contexte du problème de *housing market*, il est implicitement supposé que tous les agents peuvent directement effectuer des échanges entre eux. Or, cette hypothèse paraît vraiment improbable, en particulier dans des instances de grande taille où les agents ne sont pas forcément en mesure de communiquer entre eux. Restreindre l'ensemble des échanges directs à ceux qui sont effectivement possibles apparaît donc plus réaliste et pertinent dans des problèmes de grande taille. La possiblité pour deux agents d'échanger leur ressource peut alors être modélisée par le biais d'un réseau social [20, 16]. De récents travaux sur les couplages ont introduit un réseau social dans leur modélisation afin de capturer certains types de comportement social comme l'altruisme [4], l'influence du jugement des pairs [8] ou la collaboration [19]. La plupart de ces travaux se concentrent sur des couplages généraux bilatéraux, et seulement peu d'entre eux se sont intéressés à l'allocation de ressource en particulier. Dans cette perspective, la notion de *graphe de topologie de négociation* [12], où les échanges sont restreints à ceux entre agents d'une même clique du graphe, est à noter.

Cet article s'intéresse à une variante du problème de *housing market*, dans laquelle les agents sont intégrés dans un réseau social qui détermine leur possibilité d'échange d'objets. Chaque participant possède initialement un objet et a des préférences ordinales strictes sur les objets. Les agents peuvent échanger leurs objets sous deux conditions : l'échange est mutuellement profitable, et les agents sont liés socialement. Bien que des échanges plus sophistiqués impliquant plusieurs agents peuvent être effectués [23, 14, 13], on s'intéresse à des échanges simples au sein de paires de voisins. Les échanges sont faits sans paiement ni compensation monétaire. La question principale que l'on se propose d'étudier est de savoir, en partant de l'allocation initiale, quelles allocations d'objets peuvent émerger. En effet, certaines solutions sont éliminées en raison des préférences des agents sur les objets (personne n'est intéressé pour échanger son objet contre un autre qu'il aime moins), et le réseau limite l'accès de certains participants à d'autres. Il apparaît donc particulièrement intéressant de comprendre comment la combinaison de ces deux ingrédients influence l'issue de séquences d'échanges dans lesquelles une paire d'agents connectés entre eux s'entendent sur un échange d'objets mutuellement profitable. De plus, la question de la qualité d'une allocation résultant d'une séquence d'échanges profitables s'avère également digne d'intérêt. Dans le contexte de préférences ordinales, la Pareto-optimalité semble être une exigence minimale pour qu'une allocation soit socialement acceptable. La Pareto-optimalité a été largement étudiée dans le cadre du *house allocation problem* [3] et du *housing market* [6]. Pour autant que nous le sachions, la construction d'allocations Pareto-efficaces n'a pas été étudiée lorsque les allocations possibles sont contraintes par un réseau social.

L'article est organisé de la façon suivante. Le modèle d'allocation d'objets le long d'un réseau social est défini en Section 2, ainsi que les problèmes que nous considérons. Puis, en Section 3, le problème d'accessibilité d'un objet est étudié, et en Section 4 l'atteignabilité d'une allocation complète donnée. Enfin, avant de conclure, la recherche d'une allocation Pareto-efficace parmi celles atteignables est examinée en Section 5.

2 Modèle

2.1 Notations

Soit $N = \{1, \dots n\}$ un ensemble d'agents et $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un ensemble d'objets tels que $|N| = |X| = n$. Une allocation est une bijection $\sigma : N \to X$, où $\sigma(i)$ représente l'objet affecté à l'agent i dans σ. On peut écrire σ comme un vecteur de taille n : $\sigma = (\sigma(1), \dots, \sigma(n))$. Chaque agent est initialement doté d'un objet ; l'allocation initiale est notée σ_0. On suppose sans perte de généralité que $\sigma_0(i) = x_i$ pour tout agent i. Chaque agent i a des préférences strictes sur l'ensemble des objets, ces préférences étant exprimées par un ordre total $\succ_i$ sur X. Le profil global de préférences est noté $\succ$.

Soit $G = (N, E)$ un graphe non orienté représentant un réseau social sur les agents. Les arêtes symbolisent une possibilité de communication et d'échange entre deux agents. Une instance est un vecteur $(N, X, \succ, G, \sigma_0)$.

2.2 Dynamique d'échanges

Dans cet article, on se concentre sur des *échanges rationnels* au sein de paires d'agents. Un échange entre deux agents est dit *rationnel* si les deux agents gagnent en échangeant leurs objets. Une allocation σ' résulte d'un échange rationnel à partir de l'allocation σ, s'il existe deux agents i et j tels que $\sigma'(i) = \sigma(j)$, $\sigma'(j) = \sigma(i)$, $\sigma'(i) \succ_i \sigma(i)$ et $\sigma'(j) \succ_j \sigma(j)$, et pour tout agent $k \notin \{i, j\}$, $\sigma'(k) = \sigma(k)$.

On suppose qu'un échange ne peut être effectué qu'entre deux voisins dans le réseau social. On définit donc la réalisabilité d'un échange en fonction de G. Une allocation σ' résulte d'un échange *réalisable* à partir de σ selon $G = (N, E)$ s'il existe deux agents i et j tels que $(i, j) \in E$ et $\sigma'(i) = \sigma(j)$, $\sigma'(j) = \sigma(i)$ et $\sigma'(k) = \sigma(k)$ pour tout agent $k \notin \{i, j\}$. A partir de maintenant, dès que l'on parlera d'échange, on supposera qu'il est rationnel et réalisable. De même, les termes allocation et affectation seront employés indifféremment.

Une séquence d'échanges est une séquence d'affectations $(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_t)$ où pour tout $k \in \{1, \dots, t\}$, σ_k résulte d'un échange à partir de σ_{k-1}. Une allocation σ est *stable* si aucun échange ne peut être effectué à partir de σ. On peut remarquer que toute séquence d'échanges converge vers un état stable en $O(n^2)$ échanges.

Exemple 1 *On considère une instance où $n = 4$. Le réseau social, les préférences des agents et une séquence d'échanges sont décrits ci-dessous.*

G :	1 —	2 —	3 —	4	*1 :*	$x_4 \succ x_2 \succ \boxed{x_1} \succ x_3$
σ_0 :	$x_1 \leftrightarrow$	$x_2 \leftrightarrow$	x_3	x_4	*2 :*	$x_3 \succ x_1 \succ \boxed{x_2} \succ x_4$
σ_1 :	x_2	$x_1 \leftrightarrow$	x_3	x_4	*3 :*	$x_4 \succ x_2 \succ x_1 \succ \boxed{x_3}$
σ_2 :	x_2	x_3	x_1	x_4	*4 :*	$x_2 \succ \boxed{x_4} \succ x_1 \succ x_3$

À partir de l'allocation σ_0, représentée dans les préférences des agents par des encadrés, les agents 1 et 2 *peuvent effectuer un échange : ils sont liés dans le réseau et ils préfèrent tous deux l'objet possédé par l'autre agent. Il en va de même pour les agents 2 et 3. Si les agents 1 et 2 échangent leurs objets (flèche en gras dans la figure), on obtient l'allocation σ_1. À partir de σ_1, seuls les agents 2 et 3 peuvent échanger leurs objets, aboutissant à l'allocation σ_2. À partir de σ_2, les agents 1 et 4 préfèrent chacun l'objet de l'autre mais ils ne sont pas reliés dans G, donc cet échange n'est pas réalisable. Il s'ensuit qu'aucun échange n'est possible à partir de σ_2, ainsi σ_2 est stable.*

Une affectation σ' est *atteignable* s'il existe une séquence d'échanges $(\sigma_0, \ldots, \sigma_t)$ où $\sigma_t = \sigma'$. On note *RA* (*reachable assignments*) l'ensemble de toutes les affectations atteignables. De même, un objet $x \in X$ est dit *accessible* pour un agent $i \in N$ s'il existe une séquence d'échanges $(\sigma_0, \ldots, \sigma_t)$ où $\sigma_t(i) = x$.

La *dynamique d'échanges* est un processus distribué où les agents échangent leurs objets sans intervention extérieure à partir de l'allocation initiale jusqu'à l'obtention d'une allocation stable.

2.3 Enjeux

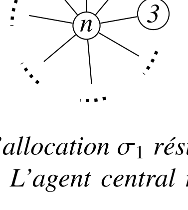
Afin d'analyser le processus distribué des dynamiques d'échanges, on s'intéresse en particulier à toutes les allocations atteignables à partir de σ_0 par des séquences d'échanges. Les deux problèmes de décision suivants émergent naturellement de la définition de notre modèle.

Objet Accessible
Instance : $(N, X, \succ, G, \sigma_0)$, agent i, objet x
Question : L'objet x est-il accessible pour l'agent i ?

Affectation Atteignable
Instance : $(N, X, \succ, G, \sigma_0)$, affectation σ
Question : L'affection σ est-elle atteignable ?

Les dynamiques d'échanges convergent toujours vers une allocation stable. Seulement, si les agents troquent leurs objets de manière non coordonnée, il est possible d'aboutir à une allocation assez mauvaise, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 2 *On considère une instance avec n agents dont les préférences sont décrites ci-dessous, ainsi que le réseau social.*



1 : $x_n \succ [\ldots] \succ \boxed{x_1}$
2 : $x_1 \succ [\ldots] \succ \boxed{x_2}$
$\vdots$ $\vdots$
n-2 : $x_{n-3} \succ [\ldots] \succ \boxed{x_{n-2}}$
n-1 : $x_{n-2} \succ [\ldots] \succ x_n \succ \boxed{x_{n-1}}$
n : $x_{n-1} \succ x_{n-2} \succ [\ldots] \succ x_1 \succ \boxed{x_n}$

L'allocation σ_1 résulte du troc entre l'agent n-1 et l'agent n. L'agent central n obtient alors l'objet qu'il préfère et n'a plus intérêt à effectuer d'autres échanges, rendant σ_1 stable. Cependant, si l'on considère la séquence d'échanges entre les agents suivants (n,1),(n,2),…,(n,n-1), alors on aboutit à l'allocation σ' dans laquelle tous les agents obtiennent leur objet préféré.

Une allocation σ est Pareto-efficace s'il n'existe pas d'affectation σ' la dominant au sens de Pareto, c'est-à-dire telle que pour tout agent $i \in N$, $\sigma'(i) \succeq_i \sigma(i)$ et il existe $j \in N$ tel que $\sigma'(j) \succ_j \sigma(j)$. Dans tout l'article, on restreint la notion de Pareto-efficacité à l'ensemble *RA* des affectations atteignables. Autrement, une allocation Pareto-efficace dans le sens standard peut ne pas être atteignable par une séquence d'échanges.

L'exemple 2 montre que les séquences d'échanges peuvent aboutir à une allocation Pareto-dominée. Cette observation nous amène à considérer les dynamiques d'échanges d'un point de vue plus centralisé où les échanges, toujours régis par les contraintes du réseau et du profit mutuel immédiat pour les deux agents, sont guidés par un coordinateur, dans le but d'atteindre une allocation Pareto-efficace parmi toutes les allocations atteignables. On étudie donc également le problème d'optimisation suivant.

Pareto
Instance : $(N, X, \succ, G, \sigma_0)$
Problème : Trouver une allocation Pareto-efficace parmi *RA*

3 Objet accessible

Cette section est consacrée au problème de décision Objet Accessible. On prouve qu'il est NP-complet, même dans le cas où le réseau est un arbre. Cependant, avec encore plus de restrictions sur le graphe, le problème devient polynomial.

On peut commencer par observer que dans tout réseau, un objet ne peut passer deux fois par le même agent. Ceci découle de la définition d'un échange rationnel, dans lequel les deux agents doivent être gagnants.

Observation 1 *Si pour une affectation atteignable σ et un agent i, $\sigma(i) \neq \sigma_0(i)$ alors pour toute affectation σ' atteignable à partir de σ, $\sigma'(i) \neq \sigma_0(i)$.*

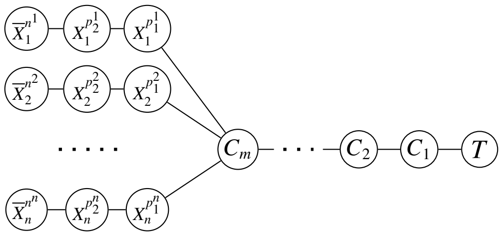
Théorème 1 Objet Accessible *est NP-complet même lorsque le réseau est un arbre.*

Preuve : On peut vérifier aisément que le problème est dans NP. La réduction utilisée se fait à partir du problème NP-complet 2P1N-SAT [25]. Dans 2P1N-SAT, étant donnés un ensemble $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de variables et une collection $C = \{C_1, \ldots, C_m\}$ de clauses sur V telle que chaque littéral positif (resp., négatif) apparaît exactement 2 (resp., 1) fois dans C, est-ce que C est satisfiable ?

Soit v_k^i (resp., $\overline{v}_k^i$) le littéral positif (resp., négatif) de la variable v_k, s'il est présent dans la clause C_i. L'indice p_j^k (resp., n^k) renvoie quant à lui à la clause contenant la j^{eme} occurrence ($j \in \{1, 2\}$) du littéral v_k (resp., la seule occurrence de $\overline{v}_k$).

L'instance $(N, X, \succ, G, \sigma_0)$ du problème Objet Accessible est construite comme suit. Chaque littéral v_k^i (resp., $\overline{v}_k^i$) est associé à un agent X_k^i (resp., $\overline{X}_k^i$), qui possède initialement l'objet x_k^i (resp., $\overline{x}_k^i$). A chaque clause C_i, correspond un agent C_i initialement doté de l'objet c_i. Un agent T possédant initialement l'objet t est ajouté, nous amenant à $|N| = |X| = m + 3n + 1$.

Le graphe $G = (N, E)$ est défini de la manière suivante.



Le profil de préférences $\succ$ est quant à lui présenté ci-après. Ne sont représentés, pour chaque agent, que les objets préférés à l'objet initialement détenu, et l'ensemble des objets associés aux littéraux de la clause C_i est noté $\{\ell_i\}$, où les littéraux sont ordonnés de manière arbitraire.

$T : \{\ell_1\} \succ \boxed{t}$
$C_i : \{\ell_{i+1}\} \succ t \succ \{\ell_i\} \succ c_1 \succ \{\ell_{i-1}\} \succ \ldots \succ c_{i-1} \succ \{\ell_1\} \succ \boxed{c_i}$
$C_m : t \succ \{\ell_m\} \succ c_1 \succ \{\ell_{m-1}\} \succ \ldots \succ c_{m-1} \succ \{\ell_1\} \succ \boxed{c_m}$
$X_k^{p_1^k} : c_{m-n^k+1} \succ c_{m-p_2^k+1} \succ x_k^{p_2^k} \succ c_{m-p_1^k+1} \succ \overline{x}_k^{n^k} \succ \boxed{x_k^{p_1^k}}$
$X_k^{p_2^k} : c_{m-p_1^k+1} \succ x_k^{p_1^k} \succ \overline{x}_k^{n^k} \succ \boxed{x_k^{p_2^k}}$
$\overline{X}_k^{n^k} : x_k^{p_2^k} \succ \boxed{\overline{x}_k^{n^k}}$

A présent qu'une instance de Objet Accessible a été construite, on affirme que C est satisfiable si et seulement si t est atteignable pour C_m.

On peut observer dans un premier temps qu'au sein du chemin τ de T à C_m, tous les agents préfèrent t à leur objet initial et n'acceptent d'échanger t, avec leur successeur dans τ, que contre un objet correspondant à un littéral satisfiant la clause associée au successeur. Il s'ensuit que l'unique façon d'amener t de T à C_m est de fournir à chaque agent C_i un objet associé à un littéral satisfiant la clause C_i. Donc, pour $i = 1$ jusqu'à m, un objet de $\{\ell_i\}$ doit être amené jusqu'à C_i.

D'un autre côté, il est garanti pour chaque branche correspondant à une variable v_k que si un objet x_k^i (resp., $\overline{x}_k^j$) sort de la branche, alors un objet $\overline{x}_k^{i'}$ (resp., $x_k^{j'}$) ne peut plus en sortir par la suite. Plus précisément, si $\overline{x}_k^{n^k}$ est le premier objet à sortir de la branche, alors l'agent $X_k^{p_1^k}$ obtient son objet préféré et plus aucun autre objet ne peut sortir de la branche. Sinon, si $x_k^{p_1^k}$ ou $x_k^{p_2^k}$ bougent en premier, alors l'agent $X_k^{p_1^k}$ reçoit un objet qu'il préfère à $\overline{x}_k^{n^k}$, donc $\overline{x}_k^{n^k}$ est bloqué et ne peut plus sortir.

Supposons qu'il existe une affectation ϕ des variables satisfiant toutes les clauses de C. Il suffit alors de choisir, pour chaque clause C_i, un littéral ℓ_i qui rend C_i vraie dans l'affectation ϕ, et d'amener l'objet correspondant jusqu'à l'agent C_i par des séquences d'échanges en procédant itérativement à partir de $i = 1$ jusqu'à m. Ces séquences d'échanges sont possibles. En effet, on peut remarquer que chaque agent C_j préfère les objets de $\{\ell_i\}$, puis c_i, puis les objets de $\{\ell_{i+1}\}$, puis c_{i+1} pour tout $i < j$, donc C_j permet bien le passage d'un objet de $\{\ell_i\}$ vers C_i pour tout $i < j$. De plus, si l'on choisit d'amener ℓ_i jusqu'à C_i, alors dans la branche correspondant à la variable associée à ℓ_i, si d'autres objets sont déjà sortis, ils sont forcément de la même polarité que ℓ_i puisqu'on les a choisis dans ϕ. Donc, rien ne bloque la sortie de l'objet ℓ_i de sa branche. Ainsi, les séquences d'échanges amenant jusqu'à C_i un objet associé à un littéral ℓ_i mis à vrai dans ϕ sont réalisables et permettent le passage ensuite de t jusqu'à C_m.

Supposons maintenant que t est atteignable pour C_m, et notons σ une allocation atteignable où $\sigma(C_m) = t$. On considère alors une affectation des variables notée ϕ, dans laquelle chaque littéral correspondant à un objet possédé par les agents $T, \ldots, C_{m-1}$ dans σ est mis à vrai. Comme précédemment mentionné, avant de pouvoir amener t jusqu'à C_m, chaque C_i doit obtenir un objet ℓ_i correspondant à l'un des littéraux de la clause qui lui est associée. Donc, une fois que C_m obtient t, ℓ_i est possédé par l'agent C_{i-1} ou T si $i = 1$. Par construction, les agents $T, \ldots, C_{m-1}$ ne peuvent obtenir un objet qu'ils préfèrent à leur objet courant après cela. Il suffit donc juste de vérifier qu'il n'existe pas dans ϕ deux littéraux ℓ_1 et ℓ_2 tels que $\ell_1 = \overline{\ell_2}$. Ceci est garanti par construction de chaque branche associée à une variable v_k, comme précédemment décrit. Ainsi, l'affectation ϕ construite satisfait C. ■

Le réseau de la précédente preuve est un arbre dans lequel tous les sous-arbres découlant d'une même racine sont des chemins (on l'appelle *étoile généralisée*). Néanmoins, Objet Accessible est résoluble en temps polynomial quand le réseau est une étoile.

Proposition 1 *Lorsque G est une étoile, il existe un algorithme polynomial pour* Objet Accessible.

Preuve : Le problème consiste à savoir si un agent donné i peut obtenir un objet donné x. Quant au réseau social, il est constitué d'un agent central noté n et de $n-1$ feuilles notées $1, \ldots, n-1$. Tout troc implique donc forcément le centre et une feuille. Une fois qu'une feuille a échangé son objet initial, elle ne peut plus intervenir dans un prochain échange (Observation 1). Ainsi, toute séquence d'échanges peut être réduit à une liste ordonnée sans répétition de feuilles, indiquant avec quel agent le centre doit échanger son objet.

Commençons par le cas où l'agent i est le centre. Le problème revient à la recherche d'un chemin dans un graphe orienté composé de l'ensemble de sommets N et de l'ensemble d'arcs décrit de la manière suivante : il existe un arc entre $a \in N$ et $b \in N \setminus \{n\}$ si et seulement si le centre et la feuille b peuvent effectuer un échange lorsque le centre possède l'objet initial de a et b a son objet initial. On déduit qu'il existe un chemin de n à b dans ce graphe orienté si et seulement si le centre peut obtenir l'objet initial de l'agent b. Un algorithme linéaire résout ce problème de chemin et la construction de ce graphe orienté est clairement polynomial.

Dans le cas où i est une feuille, le problème se réduit au précédent : le centre n doit obtenir l'objet x, et ensuite i et n échangent leurs objets. Si ces deux étapes sont réalisables, la réponse à Objet Accessible est positive. ■

On s'intéresse à présent au cas où le réseau est une chaîne. On suppose sans perte de généralité que $E = \{(j, j+1) : 1 \leq j < n\}$. L'Observation 1 implique, lorsque le réseau est un chemin, qu'une fois qu'un objet se déplace dans une certaine direction, alors il ne peut plus se déplacer dans la direction opposée.

On définit comme séquence d'échanges canonique $\kappa(j, k)$ une séquence d'échanges qui permet de faire glisser directement le long du chemin de j à k l'objet x_j jusqu'à l'agent k. Il s'agit donc de la séquence d'échanges entre les paires d'agents suivantes $(j, j+1), (j+1, j+2), \ldots, (k-1, k)$, qui transforme σ_0 en une affectation σ où $\sigma(\ell) = x_\ell$ si $\ell < j$, $\sigma(\ell) = x_{\ell+1}$ si $j \leq \ell < k$ et $\sigma(k) = x_j$. Cette séquence est dite rationnelle si tous les échanges qui la composent le sont.

La séquence d'échanges canonique s'avère être la seule séquence d'échanges potentiellement réalisable lorsqu'il s'agit de tester l'accessibilité d'un objet pour un agent situé sur une feuille de la chaîne.

Proposition 2 *Lorsque G est une chaîne, si l'objet x_j est accessible pour n, alors la séquence d'échanges canonique $\kappa(j, n)$ est rationnelle.*

Preuve : Supposons par contradiction qu'il existe $k \in \{j+1, \ldots, n\}$ tel que l'échange dans la séquence canonique entre $k-1$ et k n'est pas rationnel, c'est-à-dire $x_k \succ_k x_j$ ou $x_j \succ_{k-1} x_k$.

Dans un premier temps, supposons que $x_k \succ_k x_j$. S'il existe une séquence d'échanges aboutissant à affecter x_j à n, alors x_j doit être affecté une fois à l'agent k puisque le chemin entre j et n est unique. Comme $x_k \succ_k x_j$, l'agent k n'acceptera jamais x_j, contradiction.

Supposons à présent que $x_j \succ_{k-1} x_k$. S'il existe une séquence d'échanges aboutissant à l'affectation de x_j à n, alors x_j doit être échangé avec x_k à un moment donné, puisque x_j doit atteindre n et qu'il n'y a pas d'autre agent après n pour recevoir x_k. Cet échange ne peut pas se situer entre $k-1$ et k puisque $x_j \succ_{k-1} x_k$, et se situe donc entre des agents situés avant k. Il faut donc au préalable que les agents $k-1$ et k aient effectué un échange afin de déplacer x_k dans la direction des agents indicés inférieurement à k. À la suite de cet échange, l'objet alors détenu par $k-1$ se déplace donc dans la direction de n avant x_j, et x_j ne peut dépasser cet objet, contradiction. ■

Pour tester l'accessibilité d'un objet pour un agent situé à une feuille de la chaîne, il suffit alors de vérifier que la séquence d'échanges canonique associée est rationnelle.

Corollaire 1 *Lorsque G est une chaîne et l'agent i une feuille de G,* Objet Accessible *est résoluble en temps polynomial.*

D'autres cas polynomiaux du problème Objet Accessible dans une chaîne peuvent être listés. Le principal concerne le cas où la distance entre l'agent et l'objet est une constante.

Proposition 3 *Lorsque G est une chaîne et k une constante représentant la distance entre l'agent i et le possesseur de x,* Objet Accessible *est résoluble en temps polynomial.*

Preuve : Observons tout d'abord que s'il s'agit de savoir si l'agent i peut obtenir l'objet x_j avec $i < j$, alors on peut ignorer l'agent ℓ et l'objet x_ℓ pour tout $\ell > j$. On suppose donc sans perte de généralité que le possesseur de x est une feuille du graphe. Par ailleurs, pour toute paire d'agents $j, \ell \in N$ tels que $j < \ell$, l'objet affecté à j doit avoir un indice plus petit que celui affecté à ℓ dans toute affectation atteignable à partir de σ_0. En effet, dans le cas contraire, il s'ensuivrait qu'un objet passerait deux fois par le même agent, en se déplaçant dans un sens de la chaîne, puis dans l'autre, ce qui contredirait l'Observation 1.

L'objet x doit obligatoirement passer par tous les agents du chemin τ menant du possesseur de x dans σ_0 à l'agent i. Il faut donc que tous les agents situés sur τ préfèrent x à leur objet actuel. Mais pour faire passer l'objet x d'un agent j à son voisin ℓ sur τ, il faut que j préfère l'objet détenu par ℓ à x. Si x est accessible pour i, l'allocation finale consiste donc en une affectation σ' où $\sigma'(i) = x$ et $\sigma'(j) = y_j$ pour tout agent $j \in \tau \setminus \{i\}$ avec y_j un objet que l'agent j préfère à x. Ainsi, cela revient à choisir un ensemble de k objets parmi $X \setminus \{x\}$ afin de les affecter aux agents dans $\tau \setminus \{i\}$ pour créer une affectation finale potentiellement atteignable. Le reste des objets est affecté aux agents restants de manière à respecter la seconde observation, en suivant l'ordre croissant des indices. Il suffit alors de vérifier que l'affectation ainsi construite est bien atteignable en fonction des préférences des agents, ce qui peut être effectué en temps polynomial (voir Proposition 4 de la section suivante). Il y a donc $\binom{n-1}{k} = O(n^k)$ telles affectations possibles, ce qui nous donne un algorithme polynomial pour Objet accessible lorsque k est une constante.

Vérifions à présent la validité de l'algorithme. Si l'algorithme renvoie vrai, alors il a trouvé une affectation σ atteignable où $\sigma(i) = x$. Donc, l'accessibilité de l'objet est forcément établie. Supposons à présent que l'algorithme renvoie faux mais qu'il existe une affectation atteignable σ dans laquelle l'agent i reçoit l'objet x, c'est-à-dire $\sigma(i) = x$. Soit $X' \subseteq X \setminus \{x\}$ l'ensemble des objets affectés aux agents appartenant à $\tau \setminus \{i\}$. Puisqu'un même objet ne peut être affecté à plusieurs agents, on a bien $|X'| = k$ et chaque objet est affecté aux agents au sein de $\tau \setminus \{i\}$ par indice croissant, faute de quoi d'après la seconde observation, il y aurait un objet qui passerait deux fois par le même agent. Pour le reste de l'affectation, concernant les agents n'appartenant pas à τ, il en va de même : les objets affectés dans σ le sont forcément par ordre croissant d'indice. Ainsi, l'atteignabilité de l'affectation σ a bien été testée par l'algorithme, contradiction. ■

Malgré son apparente simplicité, Objet Accessible dans une chaîne est un problème ouvert quand il n'y a pas de restriction sur la position des agents. Il nous semble que ce cas se situe à la frontière entre problèmes polynomiaux et NP-difficiles.

4 Affectation atteignable

On s'intéresse dans cette section au problème de décision Affectation atteignable : est-ce que l'affectation σ appartient à RA ? Ce problème est montré NP-complet en général mais polynomial dans le cas d'un arbre.

Théorème 2 Affectation atteignable *est NP-complet.*

Preuve : On peut aisément vérifier que le problème est dans NP. On propose une réduction à partir du problème Objet Accessible, dont on considère une instance $\mathcal{I} = (N, X, G, \succ, \sigma_0)$. Ce problème consiste à décider si un agent, appelé sans perte de généralité 1, peut obtenir un objet donné, noté x_ℓ. On construit une instance $\mathcal{I}' = (N \cup N', X \cup X', G', \succ', \sigma'_0)$ de Affectation atteignable où tout élément de N (resp., X) a une copie dans N' (resp., X'). Les copies de j et x_j sont notées respectivement j' et x'_j. L'ensemble E' des arêtes de G' contient E, mais également chaque $j' \in N'$ est relié à chaque $k \in N' \cup \{j\}$ dans E'. L'affectation initiale σ'_0 est telle que $\sigma'_0(j) = \sigma_0(j)$ si $j \in N$, et $\sigma'_0(j) = x'_j$ si $j \in N'$. Pour tout $j \in N$, $\succ'_j$ est constitué de x'_j en première position, suivi de $\succ_j$, puis des objets restants. En ce qui concerne les agents de N', les préférences $\succ'$ sont définies comme suit.

$1' : x_\ell \succ' \boxed{x'_1}$

$\ell' : x_1 \succ' \ldots \succ' x_n \succ' \boxed{x'_\ell} \succ' x_\ell$

$j' \notin \{1', \ell'\} : x_j \succ' x_{j+1} \succ' \ldots \succ' x_n \succ' x_{j-1} \succ' \ldots \succ' x_1 \succ' \boxed{x'_j} \succ' x_\ell$

On affirme que x_ℓ est atteignable pour l'agent 1 dans $\mathcal{I}$ si et seulement si chaque agent obtient son objet préféré dans $\mathcal{I}'$.

Supposons que x_ℓ est atteignable pour l'agent 1 dans $\mathcal{I}$. Par construction, c'est également le cas dans $\mathcal{I}'$. Une fois que x_ℓ a été obtenu par l'agent 1, chaque agent $j \in N$ échange son objet avec sa copie $j' \in N'$. Ainsi, chaque $j \in N$ possède son objet préféré x'_j, de même que pour l'agent $1'$. Puis, en considérant l'agent ℓ' et après cela tout agent j' par ordre croissant d'indices, on procède à l'échange avec l'agent parmi N' possédant son objet préféré. Ces échanges sont réalisables par construction et permettent à tous les agents de N' d'obtenir leur objet préféré.

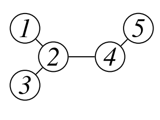
Supposons que tous les agents obtiennent leur objet préféré dans $\mathcal{I}'$. L'agent $1'$ doit recevoir x_ℓ après un échange avec l'agent 1 car aucun agent de $N' \setminus \{1'\}$ ne préfère x_ℓ à son objet initial. Pour la même raison, x_ℓ ne peut être obtenu par $1'$ par le biais des agents de $N' \setminus \{1'\}$. De plus, les préférences et la topologie du réseau imposent qu'aucun des objets de X' n'est impliqué dans le mouvement de x_ℓ jusqu'à l'agent 1. Donc, x_ℓ est bien atteignable par l'agent 1 dans $\mathcal{I}$. ■

Le graphe construit dans la précédente réduction contient des cycles. Cependant, lorsque G est un arbre, un algorithme polynomial (Algorithme 1) résout Affectation atteignable. Dans cet algorithme, la commande $pop(P)$ renvoie le premier arc du chemin P et supprime cet arc de P.

L'idée globale de l'algorithme est la suivante. Tout objet doit se déplacer le long d'un unique chemin afin d'atteindre son possesseur dans σ. Ainsi, pour que σ soit atteignable, il suffit de vérifier que les arcs des chemins que doivent suivre les objets s'intersectent bien à chaque fois en des échanges rationnels pour les agents concernés.

On illustre l'Algorithme 1 avec l'exemple suivant.

Exemple 3 *On considère une instance avec 5 agents essayant d'atteindre l'allocation $(x_4, x_5, x_1, x_3, x_2)$. Le réseau social et les préférences des agents sont décrites comme suit.*



1 : $x_4 \succ \boxed{x_1}$
2 : $x_5 \succ x_3 \succ x_1 \succ x_4 \succ \boxed{x_2}$
3 : $x_1 \succ \boxed{x_3}$
4 : $x_3 \succ x_5 \succ x_2 \succ \boxed{x_4}$
5 : $x_2 \succ \boxed{x_5}$

Les chemins calculés à la ligne 3 de l'Algorithme 1 sont :

$P_{x_1} = \{(1,2),(2,3)\}$, $P_{x_3} = \{(3,2),(2,4)\}$, $P_{x_5} = \{(5,4),(4,2)\}$,
$P_{x_2} = \{(2,4),(4,5)\}$, $P_{x_4} = \{(4,2),(2,1)\}$.

Algorithm 1:

Input: $(N, X, \succ, G, \sigma_0)$, affectation σ
Output: si σ est atteignable à partir de σ_0

1 $L \leftarrow \emptyset$; $\sigma' \leftarrow \sigma_0$;
2 **for each** $x \in X$ **do**
3 $\quad$ $P_x \leftarrow$ l'unique chemin entre le possesseur de x dans σ_0 et le possesseur de x dans σ;
4 $\quad$ $L \leftarrow L \cup \{pop(P_x)\}$;
5 **while** $L \neq \emptyset$ **do**
6 $\quad$ **if** $\exists_{i,j \in N, i \neq j}$: $(i, j), (j, i) \in L$ **then**
7 $\quad\quad$ **if** $(\sigma'(i) \succ_i \sigma'(j)) \vee (\sigma'(j) \succ_j \sigma'(i))$ **then**
8 $\quad\quad\quad$ **return** false;
9 $\quad\quad$ Mettre à jour σ' avec l'échange entre i et j;
10 $\quad\quad$ $L \leftarrow L \setminus \{(i, j), (j, i)\}$;
11 $\quad\quad$ $L \leftarrow L \cup \{pop(P_{\sigma'(i)})\} \cup \{pop(P_{\sigma'(j)})\}$;
12 $\quad$ **else return** false;
13 **return** true;

Le tableau suivant résume les différentes étapes de la boucle while (lignes 5-12) :

L	*Echange*	σ'
$\{(1,2),(2,4),(3,2),(4,2),(5,4)\}$	$2 \leftrightarrow 4$	$(x_1, x_4, x_3, x_2, x_5)$
$\{(1,2),(4,5),(3,2),(2,1),(5,4)\}$	$1 \leftrightarrow 2$	$(x_4, x_1, x_3, x_2, x_5)$
$\{(2,3),(4,5),(3,2),\emptyset,(5,4)\}$	$2 \leftrightarrow 3$	$(x_4, x_3, x_1, x_2, x_5)$
$\{\emptyset,(4,5),(2,4),\emptyset,(5,4)\}$	$4 \leftrightarrow 5$	$(x_4, x_3, x_1, x_5, x_2)$
$\{\emptyset,\emptyset,(2,4),\emptyset,(4,2)\}$	$2 \leftrightarrow 4$	$(x_4, x_5, x_1, x_3, x_2)$
$\emptyset$	-	-

A chaque étape, L garde en mémoire le premier arc de chaque chemin P_{x_i}. A l'étape 1, un seul échange est possible, celui entre les agents 2 et 4. Cet échange étant rationnel, σ' est mis à jour en effectuant cet échange. Les arcs $(2, 4)$ *et* $(4, 2)$ *sont alors supprimés de L. Les arcs* $(4, 5)$ *et* $(2, 1)$*, respectivement les nouveaux arcs des chemins P_{x_2} et P_{x_4}, sont insérés dans L. L'algorithme s'arrête quand L est vide, ce qui implique que σ est atteint.*

Proposition 4 *L'algorithme 1 résout* Affectation atteignable *en temps polynomial lorsque G est un arbre.*

Preuve : On considère une instance avec un nombre minimal d'agents pour laquelle σ est atteignable mais Algorithme 1 renvoie faux. Soit s une séquence d'échanges réalisable menant à σ à partir de σ_0. L'allocation atteinte par l'algorithme avant de conclure à la non-atteignabilité est notée σ'. Puisque $\sigma' \neq \sigma$, certains objets n'ont pas atteint leur destination prévue au sein de l'algorithme afin d'obtenir σ. La liste L n'est donc pas vide à la fin de l'exécution.
Cas 1. La liste L ne contient aucune paire d'arcs opposés. Commençons par un agent j tel que $\sigma(j) \neq \sigma'(j)$ et suivons les arcs de L. Puisque G est acyclique, le chemin est fini et se termine par un arc, disons (a, b). Cela signifie que l'objet $\sigma'(a)$ doit passer par l'agent b afin d'atteindre son propriétaire dans σ. Or, l'objet $\sigma'(b)$ a atteint sa destination, c'est-à-dire aucun arc ne sort de b car $\sigma'(b) = \sigma(b)$.

Puisqu'une unique chaîne relie deux sommets dans un graphe, on sait que dans s, l'agent a échange $\sigma'(a)$ avec un objet détenu par l'agent b. Supposons que cet objet est affecté dans σ' à un agent c. Il s'ensuit que $\sigma'(c) \neq \sigma'(b)$ et $\sigma'(c) \succ_a \sigma'(a)$.

Considérons la chaîne (unique) τ entre a et c dans G et supposons que $b \in \tau$. En considérant b comme la racine de G, on observe que a et c appartiennent à deux sous-arbres distincts. De plus, $\sigma'(c) \neq \sigma(c)$ et $\sigma'(a) \neq \sigma(a)$. Cela veut dire qu'en enlevant $\sigma'(a)$ ou $\sigma'(c)$, on obtient un plus petit contre-exemple à l'Algorithme 1, contradiction. Maintenant, supposons que $b \notin \tau$. Puisque $\sigma'(c)$ passe par b puis a dans s, a a reçu l'objet $\sigma'(c)$ avant d'obtenir $\sigma'(a)$, ce qui implique que $\sigma'(a) \succ_a \sigma'(c)$, contradiction.
Cas 2. Deux arcs opposés (a, b) et (b, a) sont présents dans L mais $\sigma'(a) \succ_a \sigma'(b)$. Dans s, l'agent a échange $\sigma'(a)$ avec un objet détenu par l'agent b. Supposons que cet objet est affecté dans σ' à un agent c. Il s'ensuit que $\sigma'(c) \neq \sigma'(b)$ et $\sigma'(c) \succ_a \sigma'(a)$. Puisque $\sigma'(c)$ passe par l'arc (b, a) dans s, si a avait reçu $\sigma'(c)$ avant d'obtenir $\sigma'(a)$, alors $\sigma'(a) \succ_a \sigma'(c)$, contradiction. Mais si a n'a pas reçu $\sigma'(c)$ avant d'obtenir $\sigma'(a)$, alors $\sigma'(c)$, ainsi que $\sigma'(a)$ et $\sigma'(b)$, n'ont pas atteint leur destination. Un contre-exemple plus petit existe donc, contradiction. ■

5 Allocations Pareto-efficaces

La question soulevée dans cette section est celle de la manière dont un coordinateur externe pourrait coordonner les échanges entre les agents afin d'obtenir une allocation Pareto-efficace sur l'ensemble des allocations atteignables RA. Notons tout d'abord qu'une telle allocation est forcément stable, sinon au moins deux agents pourraient obtenir un meilleur objet en effectuant un échange. Cependant, la réciproque est fausse, comme on peut le remarquer à travers l'Exemple 2 avec l'allocation σ_1 qui est stable mais Pareto-dominée par une autre allocation atteignable.

Proposition 5 Pareto *est NP-difficile.*

Preuve : La réduction est la même que celle exhibée dans la preuve du Théorème 2. L'instance $\mathcal{I}$ est une instance positive si et seulement si tous les agents obtiennent leur objet préféré dans $\mathcal{I}'$, qui est donc l'unique allocation Pareto-efficace. Il s'ensuit qu'un algorithme calculant une allocation Pareto-efficace pourrait être utilisé pour reconnaître une instance positive du problème Objet Accessible. ■

Ce résultat négatif n'empêche cependant pas l'existence d'un algorithme polynomial pour construire une allocation Pareto-efficace dans des classes spécifiques d'instances. Le reste de la section est consacré à la résolution de Pareto dans une chaîne et dans une étoile.

Un algorithme classique pour obtenir la Pareto-optimalité de manière centralisée est celui du *Serial Dictatorship* ([1]). Il s'agit de ranger les agents dans un certain ordre et de leur assigner tour à tour leur objet préféré parmi les objets encore disponibles, jusqu'à ce que tous les objets soient affectés. Lorsque le réseau est une chaîne, il est possible de réexploiter cette idée afin de guider les échanges des agents le long du réseau pour obtenir une allocation Pareto-efficace au sein de *RA*.

Algorithm 2:

Input: $(N, X, \succ, G, \sigma_0)$, indice k
Output: affectation σ
if $k = 1$ **then**
  return σ_0;
else
  $x_i \leftarrow$ objet préféré accessible pour k;
  $\sigma \leftarrow$ effectuer $\kappa(i, k)$ sur σ_0;
  return *Algorithme 2* $((N, X, \succ, G, \sigma), k-1)$;

Le paramètre k de l'Algorithme 2 renvoie au dictateur qui choisit son objet préféré accessible, et $\kappa(i, k)$ est la séquence d'échanges canonique (voir Proposition 2).

Proposition 6 *Lorsque G est une chaîne, l'Algorithme 2 avec* $k = n$ *renvoie une allocation Pareto-efficace parmi RA en temps polynomial.*

Preuve : L'algorithme commence avec une feuille de la chaîne, et modifie l'allocation courante de façon à ce que cet agent feuille obtienne son objet préféré (le Corollaire 1 est utilisé), puis continue sur la sous-chaîne entre $k-1$ et 1. La preuve est par induction sur k : quand la décision pour l'agent k est effectuée, l'allocation partielle pour les agents $\{k+1, \ldots, n\}$ est Pareto-efficace. ■

On étudie à présent le cas de l'étoile. Le réseau est constitué d'un agent central n et de $n-1$ feuilles $1, \ldots, n-1$ (voir Exemple 2). On suppose sans perte de généralité que $\forall i < n$, $x_i \succ_n x_{i+1}$. En effet, si $x_n \succ_n x_j$ pour un certain j, alors le centre ne troquera jamais son objet avec j, donc j gardera son objet dans toute séquence d'échanges. L'algorithme est assez simple : pour $i = n-1$ jusqu'à 1, on pratique l'échange entre n et i si celui-ci est rationnel.

Proposition 7 *Lorsque G est une étoile, il existe un algorithme linéaire pour* Pareto.

Preuve : Comme déjà mentionné, une feuille qui a déjà échangé son objet avec le centre, ne peut plus intervenir dans un autre échange. L'algorithme considère les objets par ordre croissant des préférences de l'agent central (du moins préféré au préféré). Supposons par contradiction que l'allocation σ renvoyée par l'algorithme est dominée par une autre allocation atteignable σ'. Notons s et s' les séquences d'échanges aboutissant respectivement à σ et σ'. L'argument principal repose sur le fait que toute séquence d'échanges réalisable est effectuée par ordre décroissant des indices des feuilles. Au premier échange où s et s' diffèrent, le centre échange son objet respectivement avec ℓ et ℓ'. Puisque $\ell < \ell'$, ℓ et n ne peuvent plus échanger leurs objets dans s'. Ainsi, $\sigma(\ell) \succ_\ell \sigma'(\ell)$, contradiction. ■

Il apparaît intéressant de regarder si Pareto est résoluble en temps polynomial dans une étoile généralisée par une combinaison de techniques utilisées dans la résolution des cas de la chaîne et de l'étoile.

6 Conclusion

Des problèmes naturels soulevés lorsque des agents échangent leurs objets le long d'un réseau social ont été étudiés. Nos résultats montrent qu'au-delà des préférences des agents, le réseau peut grandement influencer et contraindre les allocations possibles. En particulier, nous avons prouvé que décider si un agent peut obtenir un objet donné (Objet Accessible) est difficile d'un point de vue computationnel, même lorsque le réseau social est un arbre. Néanmoins, un algorithme efficace peut déterminer si une allocation complète (Affectation atteignable) est atteignable dans un arbre. En ce qui concerne des structures simples de graphe comme des chaînes, nous pouvons décider si un agent situé sur une feuille du réseau peut acquérir un objet donné. Ce résultat peut être étendu au cas où la distance entre un agent et la position initiale d'un objet est borné par une constante. Nous avons laissé ouverte la question de savoir si Objet Accessible peut être résolu efficacement dans une chaîne, sans restriction sur la position de l'agent.

Dans cet article, la qualité d'un point de vue social des allocations atteignables a été examinée par le biais de la recherche d'allocations Pareto-efficaces. Ce problème est montré difficile en général. Cependant, des algorithmes polynomiaux ont été exhibés pour des chaînes et des étoiles. La complexité de construction d'une allocation Pareto-efficace dans un arbre apparaît comme un problème intéressant pour la suite.

Comme perspective, de nombreux aspects de ce modèle méritent d'être explorés. Par exemple, l'impact d'un comportement stratégique de la part des agents n'a pas été étudié. Raisonner de façon stratégique peut conduire un agent à refuser un échange profitable dans l'immédiat pour avoir une vision à plus long terme. Il apparaît également important de se pencher sur le bien-être social des allocations atteignables. Au-delà de la Pareto-optimalité, est-il difficile de maximiser le bien-être social égalitaire ou utilitaire ?

Dans l'idée des prix d'anarchie et de stabilité, à quel point une allocation stable peut-elle être mauvaise, en comparaison d'une allocation obtenue suite à des échanges non contraints par un réseau social ? Une autre piste de travail est d'autoriser plus de deux agents à effectuer des échanges le long d'un réseau social et d'analyser quelles allocations peuvent émerger. En outre, notre travail ne suppose aucune restriction sur le domaine des préférences des agents (par exemple *single peakedness*), ce qui pourrait également constituer une extension intéressante.

Références

[1] Abdulkadiroğlu, A. et T. Sönmez: *Random Serial Dictatorship and the Core from Random Endowments in House Allocation Problems*. Econometrica, 66(3) :689–701, 1998.

[2] Abdulkadiroğlu, A. et T. Sönmez: *House Allocation with Existing Tenants*. Journal of Economic Theory, 88(2) :233–260, 1999.

[3] Abraham, D. J., K. Cechlárová, D. Manlove et K. Mehlhorn: *Pareto Optimality in House Allocation Problems*. Dans *Proceedings of the 16th International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC)*, pages 1163–1175, 2005.

[4] Anshelevich, E., O. Bhardwaj et M. Hoefer: *Friendship and Stable Matching*. Dans *Proceedings of the 21st European Symposium on Algorithms (ESA)*, pages 49–60, 2013.

[5] Arcaute, E. et S. Vassilvitskii: *Social Networks and Stable Matchings in the Job Market*. Dans *Proceedings of the 5th International Workshop on Internet and Network Economics (WINE)*, pages 220–231, 2009.

[6] Aziz, H., P. Biró, J. Lang, J. Lesca et J. Monnot: *Optimal Reallocation under Additive and Ordinal Preferences*. Dans *Proceedings of the 15th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS)*, pages 402–410, 2016.

[7] Aziz, H. et B. De Keijzer: *Housing Markets with Indifferences : A Tale of Two Mechanisms*. Dans *Proceedings of the 26th Conference on Artificial Intelligence (AAAI)*, pages 1249–1255, 2012.

[8] Bodine-Baron, E., C. Lee, A. Chong, B. Hassibi et A. Wierman: *Peer Effects and Stability in Matching Markets*. Dans *Proceedings of the 4th International Symposium on Algorithmic Game Theory (SAGT)*, pages 117–129, 2011.

[9] Chevaleyre, Y., P. E. Dunne, U. Endriss, J. Lang, M. Lemaître, N. Maudet, J. Padget, S. Phelps, J. A Rodriguez-Aguilar et P. Sousa: *Issues in Multiagent Resource Allocation*. Informatica, 30(1) :3–31, 2006.

[10] Chevaleyre, Y., U. Endriss, S. Estivie et N. Maudet: *Multiagent Resource Allocation in k-additive Domains : Preference Representation and Complexity*. Annals of Operations Research, 163(1) :49–62, 2008.

[11] Chevaleyre, Y., U. Endriss, J. Lang et N. Maudet: *Negotiating over Small Bundles of Resources*. Dans *Proceedings of the 4th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS)*, pages 296–302, 2005.

[12] Chevaleyre, Y., U. Endriss et N. Maudet: *Allocating Goods on a Graph to Eliminate Envy*. Dans *Proceedings of the 22nd Conference on Artificial Intelligence (AAAI)*, pages 700–705, 2007.

[13] Damamme, A., A. Beynier, Y. Chevaleyre et N. Maudet: *The Power of Swap Deals in Distributed Resource Allocation*. Dans *Proceedings of the 14th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS)*, pages 625–633, 2015.

[14] Dunne, P. E. et Y. Chevaleyre: *The Complexity of Deciding Reachability Properties of Distributed Negotiation Schemes*. Theoretical Computer Science, 396(1-3) :113–144, 2008.

[15] Dunne, P. E., M. Wooldridge et M. Laurence: *The Complexity of Contract Negotiation*. Artificial Intelligence, 164(1-2) :23–46, 2005.

[16] Easley, D. et J. Kleinberg: *Networks, Crowds, and Markets : Reasoning about a Highly Connected World*. Cambridge University Press, 2010.

[17] Endriss, U., N. Maudet, F. Sadri et F. Toni: *Negotiating Socially Optimal Allocations of Resources*. Journal of Artificial Intelligence Research, 25 :315–348, 2006.

[18] Gardenfors, P.: *Assignment Problem Based on Ordinal Preferences*. Management Science, 20(3) :331–340, 1973.

[19] Hoefer, M.: *Local Matching Dynamics in Social Networks*. Information and Computation, 222 :20–35, 2013.

[20] Jackson, M. O.: *Social and Economic Networks*. Princeton University Press, 2008.

[21] Klaus, B., D. F. Manlove et Rossi F.: *Matching under Preferences*. Dans *Handbook of Computational Social Choice*, pages 333–355. Cambridge University Press, 2016.

[22] Manlove, D. F.: *Algorithmics of Matching under Preferences*, tome 2. World Scientific, 2013.

[23] Sandholm, T.: *Contract Types for Satisficing Task Allocation*. Dans *Proceedings of the AAAI Spring Symposium*, pages 23–25, 1998.

[24] Shapley, L. et H. Scarf: *On Cores and Indivisibility*. Journal of Mathematical Economics, 1(1) :23–37, 1974.

[25] Yoshinaka, R.: *Higher-order Matching in the Linear Lambda Calculus in the Absence of Constants is NP-complete*. Dans *Proceedings of the 16th International Conference on Rewriting Techniques and Applications (RTA)*, pages 235–249, 2005.